

奥林匹克数学

钱展望 朱华伟/编著

湖北教育出版社

初一分册

OLYMPIC MATHS

奥林匹克数学 初一分册 钱展望 朱华伟/编著 湖北教育出版社

金 牌 教 练 教 你 学

奥林匹克数学

初一分册 MATHS

钱展望 朱华伟 编著

湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

奥林匹克数学．初一分册/钱展望,朱华伟主编．—武汉:湖北教育出版社,2002
(奥林匹克数学系列丛书)
ISBN 7－5351－3140－9

Ⅰ．奥… Ⅱ．①钱…②朱… Ⅲ．数学课－初中－教学参考资料 Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 011149 号

出版 发行:湖北教育出版社
网址:http://www.hbedup.com
武汉市青年路 277 号
邮编:430015 传真:027－83619605
邮购电话:027－83669149

经 销:新 华 书 店
印 刷:湖北新华印务有限公司 (430034·武汉市解放大道 145 号)
开 本:850mm×1168mm 1/32 7 印张
版 次:2002 年 3 月第 1 版 2002 年 3 月第 1 次印刷
字 数:171 千字 印数:1－10 000

ISBN 7－5351－3140－9/G·2546 定价:9.00 元

前言

数学是人类理性文明高度的结晶，数学文化是人类文明的重要组成部分。中国和其他文明古国都曾为古代的数学文化做出过不可磨灭的贡献。数学对近代及现代科学技术与生产力的迅速发展起了重要的推动作用。过去三百年中，物理学中的自然界的基本规律都是用数学表述的。近代科学技术新纪元的开辟者牛顿曾将他毕生最重要的著作命名为《自然哲学的数学原理》。20世纪最伟大的科学家爱因斯坦在他的自述文章中也一再谈到数学对他的成长和对他毕生成就的根本影响。随着科学技术的发展，电子计算机的发明和发展，数学不仅是整个自然科学的基础，同时也是工程科学和技术、信息科学和技术、经济科学、管理科学乃至某些人文科学必不可少的工具。提高人才的数学素质已成为一项迫在眉睫的重要任务。

世界上第一次真正有组织的数学竞赛始于匈牙利数学竞赛(1894年)。一个多世纪的数学奥林匹克活动的实践和研究证明，科学合理地举办各级数学奥林匹克活动，对于传播数学思想方法，激发学生学习数学的兴趣，培养学生的创新精神，提高学生的数学素养、思维能力、促进数学教师素质的提高和数学教育改革，发展和选拔优秀人才等都是十分有益的。

如何更为科学、合理、有效地开展数学奥林匹克培训活动，是我们数学教育工作者所面临的一个重要课题。建设科学、实用的培训教材则是这一课题取得进展的一大关键，是提高教学效益、提高教学质量的基本保证。作为一种尝试，本套书以笔者多年亲自培训数学奥林匹克选手积累的经验为基础，以众多的国内外数学奥林匹克文献为源泉，根据现行中学数学教学大纲，按年级分为初一分册、初二分册、初三分册、高一分册、高二分册、高三分册、方法与研究分册进行编写。它融奥林匹克数学的理论、方法与应用为一体，

充分考虑到日常课堂学习、各级数学竞赛的不同要求，以知识点为主线，尽量做到与课堂教学同步，由浅入深，由课内到课外逐步引申扩充，十分便利学生自学。

数学离不开解题。问题是数学的心脏，数学奥林匹克是解题的竞赛。要提高解题能力，练习是必不可少的。在本套书中，还专门为初一至高三各年级配备了训练题集，用作自我测试与评估。本套书所选例、习题中，既有传统的佳题，又有国内外近几年涌现的佳题，还有作者根据自己的教学实践编撰的新题，其中有相当一部分对帮助参加中、高考学生解答中、高考试卷中对能力要求较高的问题大有帮助，相信读者通过对这些问题的研讨、解答，会受益匪浅。

有必要指出的是，本书还有助于帮助读者破除对数学奥林匹克的神秘感，发现开发自己身上存在的巨大潜能，以增进自信，从而进一步大胆主动地去领略数学风采，探索数学世界奥秘。

本套书可供中等及中等以上程度的学生自学用，也可作为数学奥林匹克活动的指导参考书。

钱展望　朱华伟

2002 年 1 月



钱展望 中学数学特级教师，湖北省数学学会理事，武汉市中学数学教研会副会长，中国数学奥林匹克高级教练，全国教育系统劳动模范，全国"五一"劳动奖章获得者，武汉市首届教育界十位名师之一，享受国务院政府特殊津贴。

多年来坚持因材施教，积极探索发展学生个性特长，优化学生思维品质的中学数学教育新路，成绩斐然，所辅导的武钢三中学生中，周彤等多人在国际数学奥林匹克中获金牌，先后有十数人入选国际中学生数学奥林匹克中国代表队。参与撰写了《中国著名特级教师教学思想录》（国家教委负责组织、柳斌主编，获第三届国家图书奖），论文《数学教学中优化学生思维品质的做法》，《关于数学教学的启发思考》，分别获得武汉市首届和第三届教育科研优秀成果一等奖，前者在中国教育学会成立十周年优秀论文评选中获奖，此外还撰写有《数学奥林匹克》高中知识篇、小学提高篇（北京大学出版社），主编《走向成功》高一数学、高二数学等书。



朱华伟 博士研究生，特级教师，美国洛杉矶加州州立大学访问学者，中国数学奥林匹克高级教练，湖北省十大杰出青年，首届湖北青年五四奖章获得者，湖北省有突出贡献的中青年专家，湖北省教育科研学术带头人，享受国务院政府特殊津贴，《华罗庚少年数学》编委，《中学数学》编委。

1993年任第33届国际数学奥林匹克中国队教练，1994年任全国高中数学联赛命题组成员，1996年任汉城国际数学竞赛中国队主教练，取得团体冠军和两枚金牌、一枚银牌、一枚铜牌的佳绩，连续任第四届、第五届、第六届、第七届全国华罗庚金杯赛武汉队主教练，获全国华罗庚金杯赛金牌教练奖和伯乐奖，2001年任第42届国际数学奥林匹克中国队教练。

发表论文40余篇，翻译、编著图书40余本，论文《数学奥林匹克对选手的能力要求》被评为全国中学数学期刊优秀论文，专著《奥林匹克数学教程》获武汉市教育学会优秀专著一等奖，在国家数学竞赛世界联盟第三次会议上交流。VCD教学录像《特级教师指导学习》获全国教育电视节目特别奖。


ISBN 7-5351-3140-9
9 787535 131409 >
定 价：9.00 元

目 录

第一讲　代数初步知识

知识点和方法述要

1. 代数的特点是用字母表示数，从而有别于算术．它通过选取适当的字母代表某些数或数量使问题变得既准确、又简单明了．这里应该注意的是：

①在同一个问题中，一个字母只能表示同一个数量，以免混淆．

②字母不但可以表示具体的数，还可以表示带运算符号的式子．

2. (1)代数式是用基本的运算符号把数、表示数的字母连接而成的式子．它表示了数量间的关系．如 $1, a, 3a, a+b, ab, a^2, \frac{s}{t}$ 等都是代数式．括号不是运算符号，是表示运算顺序的符号，它也经常出现在代数式中．单独一个数或一个字母虽然不明显涉及运算但也可看作代数式．如把 1 看作 $1\times1, 1-0$，把 a 看作 $\frac{a}{1}, a-0$ 等．

(2)代数式书写要规范．字母和字母相乘，数与字母相乘，乘号通常写作“·”，或省略不写，数字因数要写在字母因数的前面，但数与数相乘仍要用乘号．代数式中出现除法运算时，一般按照分数的写法来写．如 x 除以$(x+1)$的商写成$\frac{x}{x+1}$．带分数与字母相乘时，若省略乘号应把带分数写成假分数，如 $x^2y\times1\frac{2}{3}$ 应写成$\frac{5}{3}x^2y$ 或$\frac{5x^2y}{3}$．

(3)通常认读代数式采取先算的先说，即运算顺序在前的先说，最好连运算结果一起说．如 $a-\frac{1}{2}b$ 说成 a 与 b 的$\frac{1}{2}$的差或说成 a 减去$\frac{1}{2}b$ 的差．

(4)列代数式是把实际问题中与数量有关的词语用含数、字母和运算符号的式子表示出来，也就是用代数式表示出来．列代数式一定

要紧扣关键词语，理清数量关系．与数量关系有关的词语中经常会出现“的”字，甚至出现多个“的”字，可抓住一个个“的”字将句子分成几个层次，逐层分析，一步步列出代数式．

(5)用数值代替代数式里的字母，按照代数式指明的运算计算出的结果叫做代数式的值．

代数式的值是由这一代数式中字母在允许范围内所取的值而确定的，它随字母所取的值的不同而变化．

求代数式的值主要有代入和计算两个步骤．代入时不要混淆，要对号入座，代数式中原来的运算符号和具体的数字都要保持不变，必要时可添上括号．

例题精讲

例1 填空：

(1) 一箱苹果有 m 千克重，另一箱苹果有 n 千克重，两箱苹果共重______千克；

(2)红星牌电扇原来每台成本 a 元，技术革新后每台成本降低10%，那么现在每台成本是______元；

(3)从甲地到乙地的路程是 s 千米，汽车以每小时 a 千米的速度从甲地到乙地去，走了 b 小时后，汽车把速度每小时增加 2 千米，则到达乙地共需时间______小时．

解 (1)$(m+n)$千克；

(2)$(1-10\%)a$ 元；

(3)汽车先走 b 小时的路程为 ab 千米，离乙地还有$(S-ab)$千米，以后汽车的速度是$(a+2)$千米/时，到达乙地还需$\frac{s-ab}{a+b}$小时，所以一共需$(b+\frac{s-ab}{a+2})$小时．

例2 说出下列代数式的意义：

(1)$\frac{a+b}{c}$;

(2)$a+\frac{b}{c}$;

(3)$(x+y)^2-xy$;

(4)$x+y^2-xy$.

解 (1)a 与 b 的和除以 c 所得的商;

(2)a 与 b 除以 c 的商的和;

(3)x 与 y 的和的平方减去 x,y 乘积的差;

(4)x 与 y 的平方的和减去 x,y 乘积的差.

例 3 用代数式表示:

(1)a,b 两数的立方差除 5 的商;

(2)比 a 除以 b 的 2 倍的商大于 c 的数;

(3)a 的 2 倍与 b 的差乘以 a 与 b 的$\frac{1}{3}$的和.

解 (1)注意到先读顺序在前,且"除"是与"除以"不同的概念,代数式表示为$\frac{5}{a^3-b^3}$.

(2)句子中出现三个"的"字,可用不同的线条顺次把它们所包含的层次区分开来:

比 a 除以b 的 2 倍的商大于 c 的数.

先表示细线的内容:$2b$,再表示波纹线的内容:$\frac{a}{2b}$,最后表示双线的内容:$\frac{a}{2b}+c$.

(3)a 的 2 倍与 b 的差乘以 a 与 b 的$\frac{1}{3}$的和.

用代数式表示$(2a-b)(a+\frac{1}{3}b)$.

例4 如图1－1，在长方形 $ABCD$ 中，M 是 CD 边上一点，$DM=MC$，$\overset{\frown}{DN}$ 是以 A 为圆心的一段圆弧，$\overset{\frown}{NK}$ 是以 B 为圆心的一段圆弧，$AN=a$，$BN=b$.

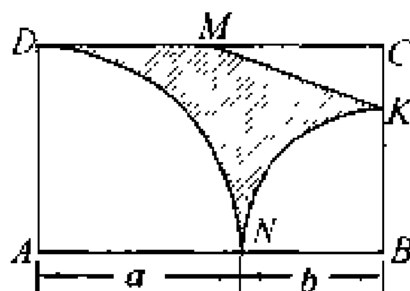


图1－1

(1)用代数式表示图中阴影部分的面积 S；

(2)当 $a=\frac{3}{2}$，$b=\frac{1}{2}$ 时，求 S.

解 (1) $S=S_{四边形ABCD}-S_{扇形AND}-S_{扇形BNK}-S_{三角形CMK}$

$$=(a+b)a-\frac{1}{4}\pi a^2-\frac{1}{4}\pi b^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(a+b)(a-b)$$

$$=(a+b)a-\frac{1}{4}\pi(a^2+b^2)-\frac{1}{4}(a+b)(a-b).$$

(2)当 $a=\frac{3}{2}$，$b=\frac{1}{2}$ 时，

$$S=(\frac{3}{2}+\frac{1}{2})\times\frac{3}{2}-\frac{\pi}{4}\cdot[(\frac{3}{2})^2+(\frac{1}{2})^2]-\frac{1}{4}(\frac{3}{2}+\frac{1}{2})(\frac{3}{2}-\frac{1}{2})$$

$$=3-\frac{5}{8}\pi-\frac{1}{2}$$

$$=2\frac{1}{2}-\frac{5}{8}\pi.$$

例5 若 $\frac{a-2b}{a+2b}=3$，求代数式 $\frac{a+2b}{a-2b}+\frac{3a-6b}{4a+8b}$ 的值

分析 不能直接求出 a，b，但代数式可直接与 $\frac{a-2b}{a+2b}$，$\frac{a+2b}{a-2b}$ 联系起来，$\frac{a-2b}{a+2b}=3$ 时，$\frac{a+2b}{a-2b}=\frac{1}{3}$. 这样可通过整体代入的办法解决问题.

原式 $=\frac{a+2b}{a-2b}+\frac{3}{4}\cdot\frac{a-2b}{a+2b}=\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\times3=2\frac{7}{12}$.

例6 从1开始，连续的奇数相加，和的情况如下表：

加数的个数(n)	和(S)
1	$1=1=1^2$
2	$1+3=4=2^2$
3	$1+3+5=9=3^2$
4	$1+3+5+7=16=4^2$
5	$1+3+5+7+9=25=5^2$
…	…

推测从 1 开始,n 个连续的奇数相加,它们的和 S 的公式是什么.取 $n=11,15,20$,检验的公式是否正确.

解 $S=1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$.

当 $n=11$ 时,

$$S=1+3+5+\cdots+21=\frac{(1+21)\times 11}{2}=11^2;$$

当 $n=15$ 时,

$$S=1+3+5+\cdots+29=\frac{(1+29)\times 15}{2}=15^2;$$

当 $n=20$ 时,

$$S=1+3+5+\cdots+39=\frac{(1+39)\times 20}{2}=20^2.$$

答 推测公式为 $S=n^2$.取 $n=11,15,20$ 检验时,推测是正确的.

练 习 一

一、填空题

1. 三个连续的奇数,中间一个为 $2k+1$,则它们的和等于______.

2. 一个两位数,十位上的数字为 a,个位上的数字比十位上的数字少 1,则这个两位数为______.

3. a 的平方与 b 的四分之三的立方的差用代数式表示为______.

4. 托运行李 p 千克(p 为整数)的费用为 c,已知托运第一个 1

千克需付 2 元，以后每增加 1 千克（不足 1 千克按 1 千克计）需增加费用 5 角，则计算托运行李费用 c 的公式是______.

5. 一项工程甲队单独做完要 x 天，乙队单独做完要 y 天. 若两队先合作 a 天后剩下的工程由乙队完成，那么剩下的工程为整个工程的______.

二、选择题

6. 某农场 1993 年的粮食产量为 a，以后每年比上年增长 $p\%$，那么 1995 年这农场的粮食产量是 (　　).

(A) $a(1+p)^2$　　(B) $a(1+p\%)^2$

(C) $a+a(p\%)^2$　　(D) $a+ap^2$

7. A、B 两地相距 m 千米，甲每小时行 a 千米，乙的速度是甲的 1.2 倍，那么乙从 A 到 B 的时间是 (　　).

(A) $\frac{m}{(1+1.2)a}$ 小时　　(B) $\frac{m}{1.2a}$ 小时

(C) $\frac{1.2m}{a}$ 小时　　(D) $\frac{ma}{1.2}$ 小时

8. 某商场进了一批布料，出售时要在进价（进货的价格）的基础上加一定的利润，其数量 x 与售价 y 如下表：

数量 x(米)	1	2	3	4	……
售价 y(克)	$7+0.2$	$14+0.4$	$21+0.6$	$28+0.8$	……

下列用 x 表示 y 的公式中正确的是 (　　).

(A) $y=7x+0.2$　　(B) $y=7+0.2x$

(C) $y=(7+0.2)x$　　(D) $y=8+0.3+x$

9. 浓度为 $a\%$ 的盐水 m 千克与浓度为 $b\%$ 的盐水 n 千克混合后的溶液浓度是 (　　).

(A) $\frac{a+b}{2}\%$　　(B) $(am+bn)\%$

(C) $\frac{am+bn}{a+b}\%$　　(D) $\frac{am+bn}{m+n}\%$

三、解答题

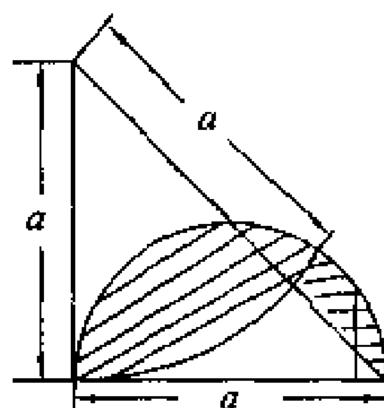
10. 船在静水中的速度为 x 千米/时，水流的速度为 2 千米/时，x 大于2，若 A、B 两地相距40 千米，从 A 顺流而下到 B、再由 B 逆流而上到 A.

(1)用代数式表示往返一次的平均速度；

(2)当 $x=6$ 时，求往返一次的平均速度.

11. 已知 $a-b=3\frac{1}{7}$，$a+2b=7\frac{1}{3}$，求 $14(a-b)+\frac{13}{2}a+\frac{5}{2}b$ 的值.

12. 用代数式表示图中阴影部分的面积 S，并求出当 $a=10\text{cm}$ 时，阴影部分的面积（π 取 3.14）.



（第 12 题）

13. 是否可以确定$\underbrace{11\cdots1}_{2000个}\underbrace{22\cdots2}_{2000个}$是两个连续自然数的积？

第二讲　有理数

知识点和方法述要

1. (1)大于零的数叫做正数，小于零的数叫做负数. 在正数的前面加上“－”号，用以表示负数. 零既不是正数，也不是负数，零不仅可以表示“没有”，而且具有非常确定的内容，如：零时、零度. 零是偶数，零是正、负数的界限，它小于一切正数，大于一切负数.

(2)有理数是整数和分数的统称. 有理数常见的分类是

$$
\text{有理数}\begin{cases}\left.\begin{array}{l}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数(自然数)}\\\text{正分数}\end{cases}\\\text{零}\end{array}\right\}\text{非负有理数}\\\text{负有理数}\end{cases}
$$

任何一个有理数都可以表示为一个既约分数$\frac{q}{p}(p\neq0)$.

(3)我们把具有某种性质的对象的全体称为具有某种性质的一个集合. 如正数集合. 集合是一个应用十分广泛的概念.

2. 规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴. 原点、正方向、单位长度是数轴的三大要素，缺一不可. 数轴能形象地表示数，每个有理数都可用数轴上的一个点表示，但数轴上的点亦不都表示有理数. 数与形的结合是一种十分重要的思想方法.

3. 有理数可以比较大小. 在数轴上表示的两个数，右边的数总比左边的数大.

4. 如 3.5 与 －3.5 这样只有符号不同的两个数，我们说其中一个是另一个的相反数. 如果 a 表示任意一个有理数，则 $-a$ 是 a 的相反数. 零的相反数是零.

5. 在数轴上表示数 a 的点与原点的距离叫做这个数 a 的绝对值，数 a 的绝对值记作$|a|$.

$$|a|=\begin{cases}a & (a>0),\\ 0 & (a=0),\\ -a & (a<0).\end{cases}$$

两个互为相反数的数的绝对值相等.任何一个有理数不大于它的绝对值.两个正数绝对值大的数大;两个负数绝对值大的数反而小.

6. 分类思想是一个重要数学思想.当问题较为复杂时,可根据问题的性质采取适当的标准分类研究,从而化繁为简,利于问题解决.分类时要注意不重复、不遗漏.

7. 有理数运算法则:

(1) 两数相加,同号的取原来的符号,并把绝对值相加;异号的取绝对值较大的加数的符号,并用较大的绝对值减去较小的绝对值,且 $a-b=a+(-b)$,减法可转化为加法.

(2)两数相乘,同号得正,异号得负,并把绝对值相乘,乘积是1的两个数互为倒数. $a\div b=a\cdot\frac{1}{b}(b\neq0)$,除法可以转化为乘法.

(3)求 n 个相同因数的积的运算,叫做乘方,乘方的结果叫做幂.在 a^n 中,a 叫做底数,n 叫做指数.

(4)在有理数的混合运算中,先算乘方,再算乘除,最后算加减.如果有括号,就先算括号里面的.

(5)把一个大于10的数记成 $a\times10^n$ 的形式,其中 a 是整数数位只有一位的数,这种记数法叫做科学记数法.如 $3800=3.8\times10^3$.

例 题 精 讲

例1 已知两数 a,b 互为相反数,c,d 互为倒数,x 的绝对值是2,求

$$x^2-(a+b+cd)x+(a+b)^{2000}+(-cd)^{2001}$$

的值.

解 依题意,有 $a+b=0,cd=1$,故

原式 $= x^2 - x + 0^{2000} + (-1)^{2001}$

$= x^2 - x - 1$

因 $|x| = 2$,所以,有

(i) $x = 2$ 时,原式 $= 2^2 - 2 - 1 = 1$;

(ii) $x = -2$ 时,原式 $= (-2)^2 - (-2) - 1 = 5$.

例 2 观察图 2-1 中的数轴,用字母 a, b, c 依次表示点 A、B、C 对应的数. 试确定 $\frac{1}{ab}, \frac{1}{b-a}, \frac{1}{c}$ 这三个数的大小关系.

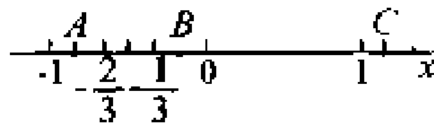


图 2-1

分析 由 B 点在 A 点右边,可知 $b - a > 0$. 而 A、B 都在原点左边,故 $ab > 0$,又 $c > 0$,这说明要比较 $\frac{1}{ab}, \frac{1}{b-a}, \frac{1}{c}$ 的大小,而需比较分母 $ab, b-a, c$ 的大小.

因 C 点在 1 的右边,所以 $c > 1$. 因 A 点在 -1 与 $-\frac{2}{3}$ 之间,B 点在 $-\frac{1}{3}$ 与 0 之间,所以 A、B 间距离大于 $\frac{1}{3}$ 而小于 1,即 $\frac{1}{3} < b - a < 1$. 同样可知 $\frac{2}{3} < |a| < 1, 0 < |b| < \frac{1}{3}$,有 $0 < ab < \frac{1}{3}$. 因此,

$$0 < ab < b - a < c,$$

可得

$$\frac{1}{ab} > \frac{1}{b-a} > \frac{1}{c}.$$

例 3 在有理数 a 与 $b(b > a)$ 之间找出无数个有理数.

分析 设 m 为一个正有理数,若 P 位于 O、M 之间且 $OP = \frac{1}{n}OM$(n 为大于 1 的自然数),则 P 点对应有理数 $\frac{m}{n}$. 同样,如图 2-3,Q 位于 A、B 之间,且 $AQ = \frac{1}{n}AB$,则 Q 点对应的有理数

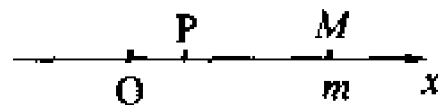


图 2-2



图 2-3

$$q = a + \frac{b-a}{n}.$$

由于 n 有无数个可取的值,所以介于 a 与 b 之间的有理数有无数个.

例4 计算:$0.0125\times3\frac{1}{5}-\frac{1}{7}(-87.5)\div\frac{15}{16}\times\frac{16}{15}+(-2^2)-4$.

解 原式 $=\frac{125}{10000}\times\frac{16}{5}-\frac{1}{7}(-87.5)\div\frac{15}{16}\times\frac{16}{15}-8$

$$=\frac{1}{25}+\frac{1}{7}\times\frac{175}{2}\times\frac{16^2}{15^2}-8$$

$$=\frac{1}{25}+\frac{128}{9}-8$$

$$=\frac{1}{25}+14\frac{2}{9}-8$$

$$=6\frac{59}{225}.$$

例5 已知$(x-3)^2$与$(n-2)$互为相反数,求代数式.

$$3x^n+\frac{1}{3}x^{2n-1}+(x^3+\frac{1}{3}x^n-3)$$

的值.

解 因$(x-3)^2$与$|n-2|$互为相反数,所以

$$(x-3)^2+|n-2|=0.$$

又因$(x-3)^2\geqslant0$,$|n-2|\geqslant0$,故$(x-3)^2=0$,且$|n-2|=0$.所以 $x=3$,$n=2$.

当 $x=3$,$n=2$ 时,

原式 $=3\times3^2+\frac{1}{3}\times3^3-(3^3+\frac{1}{3}\times3^2-3)$

$=36-27=9$.

例6 若 $abc\neq0$,求$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}$的值.

解 因 $abc\neq0$,故 a,b,c 都不为0.

(i)当 a,b,c 均大于零时,原式 $=3$;

(ii)当 a,b,c 均小于零时,原式 $=-3$;

(iii)当 a,b,c 中有两个大于零、一个小于零时,原式 $=1$;

(iv)当 a,b,c 中有两个小于零、一个大于零时,原式 $=-1$.

例7 在数 1,2,3,…,1990 之前任意添加符号"+"和"-",并依次运算,所得可能的最小非负数是多少?

解 由于

$$\begin{aligned}1+2+\cdots+1990&=\frac{(1+1990)\times1990}{2}\\&=1991\times995,\end{aligned}$$

是一个奇数,而在 1,2,3,…,1990 之前任意添加符号不改变其代数和的奇偶性,故所得最小非负数不小于 1.而

$(-1+2)+(3-4-5+6)+(7-8-9+10)+\cdots+(97-98-99+100)$

中除第一个括号内两数之和为 1 外,其余每个括号内的四个数之和恰为 0,故上式的和为 1,且去掉括号,即得符合一种题设要求的添加符号的算式.所以,1 为所求最小非负数.

例8 一串数

$\frac{1}{1},-\frac{1}{2},\frac{2}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{3}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\frac{2}{4},-\frac{3}{4},\cdots$

试问:

(1)$\frac{7}{11}$是第几个数?

(2)第 400 个数是多少?

解 依题意,以 1 为分母的分数有 1 个,以 2 为分母的分数有 3 个,以 3 为分母的分数有 5 个,…,以 10 为分母的分数有 19 个.分母为 1 到 10 的所有分数共计

$$1+3+5+\cdots+19=100(\text{个}).$$

后面接排的以 11 为分母的分数(奇数位上的分数为正数,偶数位上的分数为负数)是:

$\frac{1}{11},-\frac{2}{11},\frac{3}{11},-\frac{4}{11},\frac{5}{11},-\frac{6}{11},\frac{7}{11},-\frac{8}{11},\frac{9}{11},-\frac{10}{11},\frac{11}{11},-\frac{10}{11},\frac{9}{11},-\frac{8}{11},\frac{7}{11},-\frac{6}{11},\cdots$

(1)从上面所列举的情形知，$\frac{7}{11}$是第 107 个分数或第 115 个分数.

(2)因 $400=20^2$，从上述情形所呈现的规律知第 400 个数应是以 20 为分母的最后一个分数，即 $-\frac{1}{20}$.

练 习 二

一、选择题

1. 如果 $\frac{a}{b}=0$，那么有理数 a,b （　　）.

(A)都是零　(B)互为相反数　(C)互为倒数　(D)不都是零

2. 如果 a,b 均为有理数，且 $b<0$，则 $a,a-b,a+b$ 的大小关系是 （　　）.

(A)$a<a+b<a-b$　(B)$a<a-b<a+b$

(C)$a+b<a<a-b$　(D)$a-b<a+b<a$

3. 1997 个不全相等的有理数之和为零，则这 1997 个有理数中 （　　）.

(A)至少有一个为零　(B)至少有 998 个正数

(C)至少有一个是负数　(D)至多有 1995 个是负数

4. 下面的说法中，不正确的是 （　　）.

(A)小于 -1 的有理数比它的倒数小

(B)非负数的相反数不一定比它本身小

(C)小于零的有理数的二次幂大于原数

(D)小于零的有理数的立方小于原数

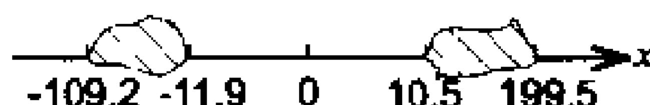
二、填空题

5. 若 a 是小于 1 的正数，试用“$<$”号将 $-a,-\frac{1}{a},\frac{1}{a},a,0,-1,1$ 连接起来______.

6. 若$0<a<1993$，在数 $a\div\frac{1994}{1995}$，$a\times\frac{1994}{1995}$，$a+\frac{1994}{1995}$，$a-\frac{1994}{1995}$中，数值最大的与数值最小的和等于______.

7. 若$|x|=3$，$|y|=2$，且$|x-y|=y-x$，则 $x+y$ 的值是______.

8. 一滴墨水洒在一个数轴上，如图所示，则黑迹盖住的整数的个数是______.



(第 8 题)

9. 已知$|x|\leqslant1$，$|y|\leqslant1$，那么$|y+1|+|2y-x-4|$的最小值是______.

10. 已知 a,b,c,d 为有理数，且满足$|b|+b=0$，$|c|-c=0$，$6|b|=3|c|=4|d|=6$，则$|2a-3b|-|3b-2a|+|2b-c|-2|d|=$______.

三、解答题

11. 电子跳蚤落在数轴上的某点 K_0，第一步从 K_0 向左跳 1 个单位到 K_1，第二步由 K_1 向右跳 2 个单位到 K_2，第三步由 K_2 向左跳 3 个单位到 K_3，第四步由 K_3 向右跳 4 个单位到 K_4，…按以上规律跳了 100 步时，电子跳蚤落在数轴上的点 K_{100}所表示的数恰是 19.94，则电子跳蚤的初始位置 K_0 点所表示的数是多少？

12. 比较$-\frac{3.85}{2.57}$，$-\frac{1534}{1023}$，$-\frac{487}{325}$，$-\frac{267}{178}$的大小.

13. 三个有理数 a,b,c，其积是负数，其和为正数，当 $x=\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}$时，试求代数式 $x^{19}-92x+2$ 的值.

14. 计算：

(1)$(\frac{17}{39}-\frac{16}{117})(0.125-\frac{1}{8})^3-[2\frac{1}{2}-(\frac{3}{8}+\frac{1}{6}-\frac{3}{4})\times24]\div[4-(-3)^2]$；

(2) $33\frac{1}{3}\times(3\frac{1}{2})^2+[-1^4-(-7)+(-\frac{5}{2})^2]\times 46\frac{2}{3}$;

(3) $\dfrac{[(\frac{2}{3})^2-\frac{5}{3}+1]\div\frac{1}{3}}{2\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+0.5}\times\dfrac{1}{2-\frac{7}{10}}$.

15. 试说明两个有理数的和仍是有理数.

第三讲　有理数计算的几种技巧

知　识　点　和　方　法　述　要

1. 加法的交换律、结合律适用于有理数，乘法的交换律、结合律及乘法对加法的分配律也适用于有理数.

2. 灵活运用有理数的运算法则、运算律，适当地添加或去括号改变运算顺序常可达到简化运算的效果. 凑“整”、分组、拆项等是有理数简便运算中常用技巧.

例　题　精　讲

例 1　一女子排球队共有 14 名队员，身高分别为：1.73 米，1.74 米，1.70 米，1.76 米，1.80 米，1.75 米，1.77 米，1.79 米，1.74 米，1.72 米，1.85 米，1.72 米，1.78 米，1.79 米. 这个队的队员平均身高是多少?

分析　观察这些数，都在 1.75 上下. 为此，可以先计算各数与 1.75的差，并为了不出现小数，把单位换算成厘米，得到以下数据：

$-2,-1,-5,1,5,0,2,4,-1,-3,10,-3,3,4.$

计算这组数的平均数，得

$$\frac{1}{14}(-2-1-5+1+5+0+2+4-3-4+10-3+3+4)$$

$$=\frac{1}{14}\times 14=1.$$

因为前面每个数都减去了 175，把这里所得的 1 再加上 175，即得到这个排球队全体队员的平均身高是 176 厘米.

注　在求一组数的平均数时，只要这组数都接近某一个数，我们都可以采用这种办法计算.

例2 $5-5\frac{1}{2}-1\frac{3}{5}+(-3\frac{3}{8})-2\frac{1}{6}+(-6\frac{2}{5})-4\frac{1}{3}-\frac{5}{8}$.

解 原式 $=5-(5\frac{1}{2}+4\frac{1}{3}+2\frac{1}{6})-(1\frac{3}{5}+6\frac{2}{5})-(3\frac{3}{8}+\frac{5}{8})$

$=5-12-8-4$

$=-19$.

注 本例中利用加法交换律、结合律凑"整",使运算较为简便.

例3 计算:$3\frac{1}{4}-2\frac{3}{8}+1\frac{1}{8}-48\times(\frac{1}{6}-\frac{1}{8})$.

解 原式 $=3\frac{1}{4}-2\frac{3}{8}+1\frac{1}{8}-48\times\frac{1}{6}+48\times\frac{1}{8}$

$=(3-2+1-8+6)+(\frac{1}{4}-\frac{3}{8}+\frac{1}{8})$

$=0$.

例4 计算:

$(-0.125)^{12}\times(-1\frac{2}{3})^{7}\times(-8)^{13}\times(-\frac{3}{5})^{9}$.

解 原式 $=-(0.125\times8)^{12}\times(\frac{5}{3})^{7}\times(\frac{3}{5})^{7}\times8\times(\frac{3}{5})^{2}$

$=-8\times\frac{9}{25}$

$=-2\frac{22}{25}$.

例5 计算:

$\frac{1}{1}+(\frac{2}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{3}{1}-\frac{2}{2}+\frac{1}{3})+(\frac{4}{1}-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{9}{1}-\frac{8}{2}+\frac{7}{3}-\frac{6}{4}+\cdots+\frac{1}{9})$.

分析 直接计算十分麻烦,为便于观察各加项间联系,列表如下:

$\frac{1}{1}$,

$\frac{2}{1}-\frac{1}{2}$,

$\frac{3}{1}-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}$.

$$\frac{4}{1}-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{4},$$

$\cdots \qquad \cdots$

$$\frac{9}{1}-\frac{8}{2}+\frac{7}{3}-\frac{6}{4}+\cdots+\frac{1}{9}.$$

于是,可利用交换律、结合律重新分组,将同一竖行上各分母相同的数放在一起.这样做,计算就方便多了.

$$\text{原式}=(\frac{1}{1}+\frac{2}{1}+\cdots+\frac{9}{1})-(\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\cdots+\frac{8}{2})+\cdots+(\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{3}{7})-(\frac{1}{8}+\frac{2}{8})+\frac{1}{9}$$

$$=(1+2+\cdots+9)-\frac{1}{2}(1+2+\cdots+8)+\frac{1}{3}(1+2+\cdots+7)\cdots-\frac{1}{8}(1+2)+\frac{1}{9}$$

$$=45-\frac{1}{2}\times 36+\frac{1}{3}\times 28-\frac{1}{4}\times 21+\frac{1}{5}\times 15-\frac{1}{4}\times 10+\frac{1}{7}\times 6-\frac{3}{8}+\frac{1}{9}$$

$$=45-18+\frac{28}{3}-\frac{21}{4}+3-\frac{10}{6}+\frac{6}{7}-\frac{3}{8}+\frac{1}{9}$$

$$=33\frac{5}{504}.$$

例 6 计算:

$$1+2.5+4+5.5+7+8.5+10+11.5+13+14.5.$$

解 将所求的和记作 S,则

$$S=1+2.5+4+5.5+7+8.5+10+11.5+13+14.5.$$

根据加法交换律,有

$$S=14.5+13+11.5+10+8.5+7+5.5+4+2.5+1.$$

于是,有

$$2S=(1+14.5)\times 10.$$

所以 $S=77.5$.即为所求.

注 和式中相邻项的差相同,这诱使我们将和式各项反序排列,

再将前后二和式相加，位于同一位置的一对数的和相同，从而使运算十分简便.

例 7 计算：

(1) $1-2+2^2-2^3+\cdots+2^{10}-2^{11}$.

(2) $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\cdots+\frac{10}{2^{10}}$.

解 (1)记 $S_1=1-2+2^2-2^3+\cdots+2^{10}-2^{11}$，则

$$2S_1=2-2^2+2^3-\cdots-2^{10}+2^{11}-2^{12}.$$

将两式相加，得

$$3S_1=1-2^{12},$$

可得 $S_1=\frac{1}{3}(1-2^{12})=-1365$，即为所求.

(2)记 $S_2=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\cdots+\frac{10}{2^{10}}$，则

$$\frac{1}{2}S_2=\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{3}{16}+\cdots+\frac{9}{2^{10}}+\frac{10}{2^{11}}.$$

两式相减，得

$$\frac{1}{2}S_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^{10}}-\frac{10}{2^{11}},$$

类似(1)，有

$$\frac{1}{4}S_2=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{2^{11}}-\frac{10}{2^{12}},$$

再将上、下两式相减，得

$$\frac{1}{4}S_2=\frac{1}{2}-\frac{10}{2^{11}}-\frac{1}{2^{11}}+\frac{10}{2^{12}},$$

所以

$$S_2=2-\frac{10}{2^9}-\frac{1}{2^9}+\frac{10}{2^{10}}=1\frac{253}{256}.$$

即为所求.

注 (1)中和式的前、后项间的比是相同的，根据这一特点，采用了“错位相消”的方法.(2)中和式的前、后项间的分母的比相同，分子间差不变，则先把它转化为(1)的情形，再作简便计算.

例 8　计算：$\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}-\frac{1}{20}-\frac{1}{30}-\frac{1}{42}-\frac{1}{56}$.

解　原式 $=\frac{1}{2}-(\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+\frac{1}{6\times7}+\frac{1}{7\times8})$

$=\frac{1}{2}-[(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{6})+(\frac{1}{6}-\frac{1}{7})+(\frac{1}{7}-\frac{1}{8})]$

$=\frac{1}{2}-(\frac{1}{2}-\frac{1}{8})$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$.

注　例 8 中采用了裂项相消的方法.

练　习　三

一、填空题

1. $1-3+5-7+9-11+\cdots-999+1001=$ ______.

2. $(-125)\times(-6)\times(-8)\times(-1\frac{2}{3})=$ ______.

3. $1989\times19901990-1990\times19891989=$ ______.

4. $||||1992-1993|-1994|-1995|-1996|=$ ______.

5. $(\frac{3}{4}+\frac{1}{5})+(\frac{4}{5}+\frac{1}{6})+(\frac{5}{6}+\frac{1}{7})+(\frac{6}{7}+\frac{1}{8})+(\frac{7}{8}+\frac{1}{9})+(\frac{8}{9}-\frac{1}{10})=$ ______.

6. $(19\frac{4}{9}+9\frac{4}{19})\div(-2\frac{7}{9}-1\frac{6}{19})=$ ______.

7. $(2\times3\times4\times5)(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5})=$ ______.

8. $(-1\frac{1}{36}+\frac{13}{107}\div\frac{24}{107}-\frac{17}{18})\div(-\frac{7}{8})\times1\frac{7}{11}=$ ______.

9. $2-2^2-2^3-2^4-\cdots-2^{18}-2^{19}+2^{20}=$ ______.

10. 十位评委为具体操运动员打分如下：10，9.7，9.85，9.93，9.6，

9.8,9.9,9.85,9.87,9.6,去掉一个最高分和一个最低分,其余八个分数的平均数记为该运动员的得分,则这个运动员的得分是______.

二、解答题

11. 计算:$(1+\frac{1}{1\times3})(1+\frac{1}{2\times4})(1+\frac{1}{3\times5})(1+\frac{1}{4\times6})\cdots(1+\frac{1}{98\times100})(1+\frac{1}{99\times101})$.

12. 计算:$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+10}$.

13. 计算:$1-\frac{2}{1\times(1+2)}-\frac{3}{(1+2)(1+2+3)}-\cdots-\frac{10}{(1+2+\cdots+9)(1+2+\cdots+10)}$.

14. 计算:$\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{5}{8}-\frac{7}{16}+\cdots+\frac{17}{512}$.

第四讲 新指令下的运算

知识点和方法述要

如同对有理数给出加、减、乘、除、乘方等运算的法则,我们还可进一步对代数式中某些相同的结构或某种特定程序的操作运算赋予特定运算符号,给出新的规定,从而形成一种新的运算. 如用 * 代表一种运算:对有理数有 $a*b=\frac{a+b}{2}$. 这里的 * 实际上就是求两个数的平均数的运算. 除新的运算法则外,其余的运算符号的含义都不变,括号的作用也不变. 进行这类运算关键在于正确理解新指令的含义,结合其他条件,将新运算化归到熟知的运算上去 .

例题精讲

例1 规定运算 * ,使得 $x*y=\frac{Axy}{4x+5y}$,且 $1*2=1$,试求 $2*3$ 的值.

解 依题意,有

$$1*2=\frac{A\times1\times2}{4\times1+5\times2}=1,$$

解得 $A=7$. 所以

$$x*y=\frac{7xy}{4x+5y}. \qquad ①$$

由①可得

$$2*3=\frac{7\times2\times3}{4\times2+5\times3}=1\frac{19}{23}.$$

例2 对正整数 $a,b,a\nabla b$ 等于由 a 开始的连续 b 个正整数之和,如 $2\nabla3=2+3+4=9,5\nabla4=5+6+7+8=26$.

(1)试计算 $1\nabla[9\nabla(9\nabla5)]$的值;

(2)若 $1\nabla x=15$,求 x;

(3)若 $x\nabla3=12$,求 x.

解 (1) $9\nabla5=9+10+11+12+13=55$,

$$9\nabla(9\nabla5)=9\nabla55=9+10+\cdots+63=1980,$$

所以 $1\nabla[9\nabla(9\nabla5)]$

$=1\nabla1980$

$=1+2+\cdots+1980$

$=1961190.$

(2)依题意,有

$$1+2+\cdots+x=15.$$

解得 $x=5$.

(3)依题意,有

$$x+(x+1)+(x+2)=12,$$

即
$$3x+3=12.$$

解得 $x=3$.

例 3 如果规定运算,使得

$$x*y=(x+1)(y+1)-1,$$

问下面各式子中哪一个是错误的?

(A) $x*y=y*x$;

(B) $x*(y+z)=(x*y)+(x*z)$;

(C) $(x-1)*(x+1)=(x*x)-1$;

(D) $x*0=x$;

(E) $x*(y*z)=(x*y)*z$.

分析 可逐一验证.

$$x*y=(x+1)(y+1)-1=(y+1)(x+1)-1=y*x,$$

(A)正确.

$$\begin{aligned}x*(y+z)&=(x+1)(y+z+1)-1\\&=xy+xz+x+y+z,\end{aligned}\qquad ①$$

$$(x*y)+(x*z)=(x+1)(y+1)-1+(x+1)(z+1)-1$$
$$=xy+xz+2x+y+z\ . \qquad ②$$

由①,②知(B)不正确.

$$(x-1)*(x+1)=x(x+2)-1=x^2+2x-1, \qquad ③$$
$$(x*x)-1=(x+1)(x+1)-1-1=x^2+2x-2, \qquad ④$$

由③,④知(C)正确.

$$x*0=(x+1)(0+1)-1=x,$$

故(D)成立.

$$x*(y*z)=x*[(y+1)(z+1)-1] \qquad ⑤$$
$$=(x+1)(y+1)(z+1)-1,$$
$$(x*y)*z=[(x+1)(y+1)-1]*z$$
$$(x+1)(y+1)(z+1)-1, \qquad ⑥$$

由⑤,⑥知(E)正确.

综上所述,唯有(B)是错误的.

注 (A)、(E)正确、(B)错误说明这里的运算"$*$"满足交换律和结合律,但不满足对加法的分配律.特殊指令下的运算对交换律、结合律、分配律不一定满足.

例 4 如果规定运算,使得 $a\triangle b=\dfrac{a+2b}{2}$,解方程:$3\triangle|x|=4$.

解 原方程即

$$\frac{3+2|x|}{2}=4,$$

化简得 $|x|=\dfrac{5}{2}$,所以 $x=\pm\dfrac{5}{2}$.

例 5 两个整数(a,b),依先后次序排在一起,称为一个整数有序对,记作(a,b).当 $a\neq b$ 时,显然 $(a,b)\neq(b,a)$.现规定运算 $*$,使得

$$(a,b)*(c,d)=(a-c,b+d),$$

其中 a,b,c,d 为整数.若 $(3,2)*(0,0)$ 与 $(x,y)*(3,2)$ 表示相同的有序整数对.试求 x^2+xy+y^2 的值.

解 依题意,有

$$(3,2)*(0,0)=(3-0,2+0)=(3,2), \qquad ①$$

$$(x,y)*(3,2)=(x-3,y+2). \qquad ②$$

由①,②可得

$$\begin{cases}x-3=3,\\y+2=2.\end{cases}$$

解得$\begin{cases}x=6,\\y=0.\end{cases}$ 所以

$$x^2+xy+y^2=6^2+6\times0+0^2=36.$$

例 6 对任意整数 $x,y(x\neq0)$规定运算 $*$,使得 $x*y=ax^y+b$,其中 a,b 为已知数.若 $2*3=35,(-1)*1989=-10$,

(1)试求 $5*1989$ 的末两位数;

(2)求满足方程 $x*1991=0$ 的整数 x.

解 (1)因 $x*y=ax^y+b$,且 $2*3=35,(-1)*1989=-10$,所以

$$\begin{cases}a\cdot2^3+b=35,\\a\cdot(-1)^{1989}+b=-10,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}8a+b=35,\\-a+b=10.\end{cases}$$

解得$\begin{cases}a=5,\\b=-5.\end{cases}$ 于是

$$x*y=5x^y-5. \qquad ①$$

由①得

$$5*1989=5\times5^{1989}-5=5^{1990}-5.$$

5^{1990}的末两位数字为25,故 $5*1989$ 的末两位数字为20.

(2)由①得

$$x*1989=5x^{1989}-5=0,$$

即

$$x^{1989}=1.$$

解得 $x=1$.

例 7 规定运算 $*$，使得 $x*y=ax+by-cxy$，其中 a,b,c 为已知数.若 $1*2=3,2*3=4$，且对任意有理数 $x*m=x,m\neq 0$，试求 m 的值.

解 因 $x*y=ax+by-cxy$，且 $1*2=3,2*3=4$，故可得

$$\begin{cases} a+2b-2c=3, & ① \\ 2a+3b-6c=4. & ② \end{cases}$$

又 $$ax+bm-cmx=x,$$

即 $$(a-cm-1)x+bm=0$$

对任意有理数 x 成立，必须

$$\begin{cases} a-cm-1=0, & ③ \\ bm=0. & ④ \end{cases}$$

因 $m\neq 0$，由④可得 $b=0$.将 $b=0$ 代入①，②得

$$\begin{cases} a-2c=3, & ⑤ \\ a-3c=2. & ⑥ \end{cases}$$

由⑤，⑥解得 $\begin{cases} a=5, \\ c=1, \end{cases}$ 再代入③得 $m=4$.

例 8 令运算 $\circ$，使得 $a\circ b=a+b-ab$，求出所有使

$$(x\circ y)\circ z+(y\circ z)\circ x+(z\circ x)\circ y=0$$

成立的关于整数 x,y,z 的解.

解
$$\begin{aligned}(x\circ y)\circ z &=(x+y-xy)\circ z \\ &=x+y-xy+z-(x+y-xy)z \\ &=x+y+z-xy-yz-zx+xyz. \quad ①\end{aligned}$$

根据对称性可知，$(y\circ z)\circ x,(z\circ x)\circ y$ 也都等于①式右边，故

$$3(x+y+z-xy-yz-zx+xyz)=0,$$

即 $$x+y+z-xy-yz-zx+xyz=0. \quad ②$$

注意到

$$(x-1)(y-1)(z-1)=xyz-xy-yz-zx+x+y+z-1, \quad ③$$

由②，③可得

$$(x-1)(y-1)(z-1)=-1. \quad ④$$

由于④式两边都是整数，所以，有

$$\begin{cases}x-1=-1,\\y-1=1,\\z-1=1;\end{cases}\text{或}\begin{cases}x-1=1,\\y-1=-1,\\z-1=1;\end{cases}\text{或}\begin{cases}x-1=1,\\y-1=1,\\z-1=-1;\end{cases}\text{或}\begin{cases}x-1=-1,\\y-1=-1,\\z-1=-1.\end{cases}$$

解得$\begin{cases}x=0,\\y=2,\\z=2;\end{cases}$或$\begin{cases}x=2,\\y=0,\\z=2;\end{cases}$或$\begin{cases}x=2,\\y=2,\\z=0;\end{cases}$或$\begin{cases}x=0,\\y=0,\\z=0.\end{cases}$

例9 对于不小于3的自然数，规定$\overline{n}$表示不是n的约数的最小自然数．求$\overline{\overline{19}\times\overline{96}}$．

解 注意到$96=3\times 2^5$，结合数列：1，2，3，4，5，…可以看出$\overline{96}=5$，$\overline{19}=2$，于是

$$\overline{\overline{96}\times\overline{2}}=\overline{5\times 2}=\overline{10}=3.$$

练 习 四

一、填空题

1．规定运算$\oplus$，使得$a\oplus b=a^3-b^3$，则$1\oplus(-2)=$______．

2．规定运算$\triangle$，使得$x\triangle y=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$，则$(-\dfrac{1}{2})\triangle(-\dfrac{1}{3})=$______．

3．规定运算$\odot$，使得$a\odot b=\dfrac{a+b}{1-ab}$，则$(\dfrac{1}{2}\odot\dfrac{1}{5})\odot\dfrac{1}{8}=$______．

4．如表所示，a表示行的序号，b表示列的序号，规定运算$*$，如$3*2=1$，$4*4=1$，则$(2*4)*(1*3)=$______．

*	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

5．规定运算$\oplus$，$\otimes$，使得$a\oplus b=a+b-1$，$a\otimes b=ab-1$，则(6

$\otimes 8)\oplus(6\oplus 8)=$______.

二、解答题

6. 对于 1,2,…,1990 中任意两个数 a,b,规定运算 $a\circ b=a$,试判断运算是否满足结合律、交换律?

7. 规定运算 $*$,使得对于任意两个非零有理数 a 和 b,有 $a*b=2ab$. 试判定下面三个算式是否成立?

(i)$a*b=b*a$;

(ii)$(a*b)*c=a*(b*c)$;

(iii)$\frac{1}{2}*a=a*\frac{1}{2}=a$.

8. 规定运算 $*$,使得对任意自然数 x,y,$x*y=2(x+2xy+y)$. 若要求 $a*b=1994$,试问这样的有序自然数对有多少?

9. 对整数规定一种运算 $*$,使得:

(i)对所有 x,有 $x*0=1$;

(ii)对所有 x,y,z,有$(x*y)*z=(z*xy)+z$.

试问:$1*x=x*1$ 是否成立?

10. 规定运算 $*$,使得

(i)对所有 x,y,有$(x+y)(x*y)=x^2*y^2$;

(ii)对所有 x,y,z,有 $x*y=(x+z)*(y+z)$;

(iii)$1*0=1$.

若已知 a,b,试求 $a*b$.

第五讲　整式的加减

知识点和方法述要

1. 单项式

(1)所谓单项式是指表示数字与字母乘积的代数式.单独的一个数或一个字母也是单项式,如 $1,0,-a$ 等.单项式中只有乘法和乘方运算,不含加减运算,可含有除以数的运算,但绝不能有除以字母的运算.如$\frac{x}{2}$是单项式,而$\frac{2}{x}$只是代数式,却不是单项式.

(2)单项式的系数一般是指单项式中的数字因数,如 $-0.5x^2y$,a,$-y$ 的系数分别为 $-0.5,1,-1$.若单项式中的某些字母只是常数的记号,则也是系数,如圆的面积公式 πR^2 中的 圆周率 π.

(3)单项的次数是指式中(除系数外)所有字母的指数的和.如 $-\frac{4}{5}a^3b$ 是关于 a,b 的四次单项式.非零常数是零次多项式,如 -1.

2. 多项式

几个单项式的代数和叫做多项式.其中每个单项式叫做多项式中的项,不含字母的项叫做常数项.多项式的次数是指多项式中次数最高的项的次数.多项式的项包括有它前面的性质符号.如果各项的次数都相同,则称之为齐次多项式.如 $x^2-3xy+4y^2$ 称为关于 x,y 的二次齐次式.

3. 多项式的排列

(1)为了适应不同的需要,往往把多项式的各项按要求重新排列,多项式的排列分升幂排列和降幂排列两类,前者是把一个多项式按某一个字母的指数从小到大的顺序排列,后者则是把一个多项式按某一字母的指数从大到小的顺序排列.多项式重新排列时,不能丢掉各项前面的性质符号,即各项都要带着符号移动.

(2)每一个多位整数都能写成按照 10 的降幂排列的多项式形式，如$\overline{abcd} = a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10 + d$.

4. 同类项

(1)同类项是指所含字母相同，并且相同字母的指数也分别相同的项. 几个常数项也是同类项. 如 bc^2 与 $-\frac{1}{2}bc^2$ 是同类项，而 $3a^2c$ 与 $3ac^2$ 不是同类项.

(2)所谓合并同类项是指把同类项合并为一项的过程，其合并法则是：把同类项的系数相加，用所得的结果作为系数，字母和字母的指数保持不变.

5. 去括号与添括号

代数式中，括号与括号前面的符号是一个整体. 因此，对括号前面是"－"号时，去掉括号后，括号里面的各项都要改变符号. 相反，对某些项加括号并在括号前添加"－"号时，括号里面的各项也都要改变符号. 括号内的多项式与一个数相乘时，要注意按分配律进行计算.

6. 整式的加减法则

几个整式相加减，通常用括号把每一个整式括起来，再用加减号相连，其运算的一般步骤是：

(i)若有括号，则先按去括号法则去掉括号.

(ii)合并同类项.

(iii)最后结果尽可能按同一字母进行降(升)幂排列.

例 题 精 讲

例 1 化简：

$$2m - \{9n + [4m - 7n - (-4m - n)] - 6m\}.$$

解一 原式 $= 2m - \{9n + [4m - 7n + 4m + n] - 6m\}$

$= 2m - \{9n + [8m - 6n] - 6m\}$

$$=2m-\{9n+8m-6n-6m\}$$
$$=2m-\{3n+2m\}$$
$$=2m-3n-2m$$
$$=-3n.$$

解二 原式 $=2m-9n-[4m-7n-(-4m-n)]+6m$

$$=8m-9n-[4m-7n-(-4m-n)]$$
$$=8m-9n-4m+7n+(-4m-n)$$
$$=4m-2n+(-4m-n)$$
$$=4m-2n-4m-n$$
$$=-3n.$$

解三 原式 $=2m-9n-4m+7n-4m-n+6m$

$$=-3n.$$

注 解一是按从里到外的顺序逐层去括号，并在每去一层括号后及时合并一次同类项，这样做可减少出错，简化运算.解二是按从外到里的顺序逐层去括号，去大括号时把中括号内各项看作一项，再去中括号时又把小括号内各项看作一项，并及时合并同类项.解三则是先确定各项前“-”号的个数，利用“奇负偶正”法则同时去掉全部括号，这样做比较简捷，但对能力提出了更高的要求.

例2 计算：

$$3\{(2x-1)-[3(2x-1)+3]\}-(3-6x).$$

解 原式 $=3\{(2x-1)-3(2x-1)-3\}-3(1-2x)$

$$=3[-2(2x-1)-3]+3(2x-1)$$
$$=-6(2x-1)-9+3(2x-1)$$
$$=-3(2x-1)-9$$
$$=-6x-6.$$

注 这里先把“$2x-1$”看作一个整体进行计算，这样做比较简便.进行整式加减法时，要根据题设的整式的结构，合理运用法则，灵活处理.

例3 求值：

(1) $-7x^{n-1}-5x^{n}-(-7x^{n-1})-5(x^{n-1}-2x^{n})$. 其中 $x=3, n=2$.

(2) $5ab-4\frac{1}{2}a^{3}b^{2}-2\frac{1}{4}ab+\frac{1}{2}a^{3}b^{2}-2\frac{3}{4}ab-a^{2}b-1$. 其中 $a=1, b=-2$.

解 (1)原式 $=-7x^{n-1}-5x^{n}+7x^{n-1}-5x^{n-1}+10x^{n}$

$=5x^{n}-5x^{n-1}$.

当 $x=3, n=2$ 时,

原式 $=5\times3^{2}-5\times3=30$.

(2)原式 $=(5-2\frac{1}{4}-2\frac{3}{4})ab+(-4\frac{1}{2}+\frac{1}{2})a^{3}b^{2}-a^{2}b-1$

$=-4a^{3}b^{2}-a^{2}b-1$.

当 $a=1, b=-2$ 时,

原式 $=-4\times1^{3}\times(-2)^{2}-1^{2}\times(-2)-1$

$=-15$.

注 对于代数式求值,通常先化简,再代入求值.这样做有利于简化计算.

例 4 已知 $A=a^{3}-3a^{2}+2a-1, B=2a^{3}+2a^{2}-4a-5$,计算 $A-4(B-\frac{A+B}{2})$,并求 $a=-1$ 时的值.

解 $A-4(B-\frac{A+B}{2})=A-4B+2(A+B)=3A-2B$.

当 $A=a^{3}-3a^{2}+2a-1, B=2a^{3}+2a^{2}-4a-5$ 时,

$3A-2B=3(a^{3}-3a^{2}+2a-1)-2(2a^{3}+2a^{2}-4a-5)$

$=3a^{3}-9a^{2}+6a-3-4a^{3}-4a^{2}+8a+10$

$=(3-4)a^{3}-(9+4)a^{2}+(6+8)a+(-3+10)$

$=-a^{3}-13a^{2}+14a+7$.

当 $a=-1$ 时,

原式 $=-a^{3}-13a^{2}+14a+7$

$=-(-1)^{3}-13\times(-1)^{2}+14\times(-1)+7$

$= -19.$

所求值为 -19.

例 5 已知 m, x, y 满足:

(i) $\frac{2}{3}(x-5)^2+5|m|=0$;

(ii) $-2a^2b^{y+1}$ 与 $3a^2b^3$ 是同类项.

求 $0.375x^2y+5m^2x-|-\frac{7}{16}x^2y+[-\frac{1}{4}xy^2+(-\frac{3}{16}x^2y-3.475xy^2)]-6.275xy^2|$ 的值.

分析 因 $(x-5)^2$, $|m|$ 都是非负数,故由(i)可得 $(x-5)^2=0$, $|m|=0$,即 $x=5, m=0$. 又由(ii)知 $y+1=3$,可得 $y=2$.

下面先对代数式化简:

原式 $=0.375x^2y+5m^2x+\frac{7}{16}x^2y+\frac{1}{4}xy^2+\frac{3}{16}x^2y+3.475xy^2+6.275xy^2$

$=(0.375+\frac{7}{16}+\frac{3}{16})x^2y+(\frac{1}{4}+3.475+6.275)xy^2+5m^2x$

$=x^2y+10xy^2+5m^2x.$

将 $x=5, y=2, m=0$ 代入上式求值:

原式 $=5^2\times2+10\times5\times2^2+5\times0^2\times5=250.$

例 6 已知 $a+b=5, ab=-6$,求 $(2a-4b-5ab)-(a-5b-ab)$ 的值.

解 原式 $=2a-4b-5ab-a+5b+ab$

$=a+b-4ab.$

当 $a+b=5, ab=-6$ 时,

原式 $=5-4\times(-6)=29.$

例 7 如图,一个矩形被分成 11 个不同大小的正方形,其中最小正方形的边长是 9mm,求矩形的边长.

分析 如图 5-1,给图中的小正方形编上号.①号正方形的边长是 9mm.设②号正方形的边长为 x(mm),则

③的边长 $x+9$.

④的边长 $x+9+9=x+18$.

⑤的边长 $x+(x+9)=2x+9$.

⑥的边长 $x+(2x+9)=3x+9$.

⑦的边长 $(x+18)+(x+9)+(2x+9)-(3x+9)=x+27$.

⑧的边长 $(2x+9)+(3x+9)-(x+27)-(x+18)=3x-27$.

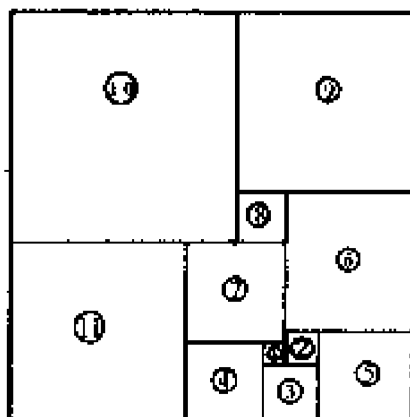


图 5－1

⑨的边长 $(3x-27)+(3x+9)=6x-18$.

⑩的边长 $(6x-18)+(3x-27)=9x-45$.

⑪的边长 $(x+27)+(x+18)=2x+45$.

注意到矩形的一边由⑩,⑨的正方形的边组成,长

$$(9x-45)+(6x-18)=15x-63,$$

又可由⑪,④,③,⑤四个正方形的边组成,长

$$(2x+45)+(x+18)+(x+9)+(2x+9)=6x+81.$$

故
$$15x-63=6x+81.$$

解上述方程得 $x=16$,进而可得矩形的边长为

$$15\times16-63=177(\mathrm{mm}),$$

及
$$(9x-45)+(2x+45)=11x=11\times16=176(\mathrm{mm}).$$

练 习 五

一、选择题

1. 下列代数式不是单项式的是　　(　　).

(A)$\frac{a}{3}$　　(B)-0.5　　(C)0　　(D)$\frac{3}{a}$

2. 代数式 $6x^2y+\frac{1}{2}$,$4xy+z^2$,$-\frac{1}{5}y^2+xz$,$\frac{x+y}{2}$中不是整式的有　　(　　).

(A)1 个　　(B)2 个　　(C)3 个　　(D)4 个

3. 已知 $-x+y=3$，则 $-4(x-y)-3x+3y+5$ 的值是（　　）.

(A) -16　　(B)2　　(C)8　　(D)26

二、填空题

4. 已知 $3x^{m+1}y^5$ 与 $-mx^4y^{n+3}$ 是同类项，则它们的和是____.

5. 当 $k=$______时，$x^2+3kxy-3y^2$ 与 $8-\frac{1}{3}xy$ 的差中不含 xy 项.

6. 当 $m=-3$ 时，$m^3x+my-81$ 的值是 10，当 $m=3$ 时，该整式的值是______.

三、解答题

7. 一个多项式，当减去 $2x^2-3x+7$ 时，因把"减去"误认为"加上"，得 $5x^2-2x+4$，试问这题的正确答案是多少？

8. 已知 $A=x^2-2xy+y^2$，$B=2x^2-6xy+3y^2$，求代数式 $3A-[(2A-B)-4(A-B)]$ 的值，其中 $|x|=5$，$y^2=9$ 且 $x+y=-2$.

9. 先化简，再求值：

(1) $(a^4+3ab-6a^2b^2)-(3ab^2-4ab-6a^2b^2)-(7a^2b^2-ab^2+2a^4-b^4)$，其中 $a=-2$，$b=1$.

(2) $2(2a+b)^2-3(2a+b)+8(2a+b)^2-6(2a+b)$，其中 $a=-\frac{3}{4}$，$b=\frac{1}{2}$.

10. 将 1，2，3，…，100 这 100 个自然数，任意分成 50 组，每组两个数. 现将每组的两个数中的任一个数值记作 a，另一个记作 b，代入代数式 $\frac{1}{2}(|a-b|+a+b)$ 中进行计算，求出其结果. 50 组都代入后可求得 50 个组，求这 50 个值的和的最大值.

第六讲　一元一次方程

知识点和方法述要

1. (1)用等号"＝"来表示相等关系的式子,叫做等式.

(2)等式有以下两条性质.

(i)等式两边都加上(或减去)同一个数或同一个整式,所得结果仍是等式.

(ii)等式两边都乘以(或除以)同一个数(除数不为0),所得结果仍是等式.

(3)等式的特征是式子中含有"＝"号,所以代数式不是等式.当不论用任何数值代替等式中的字母,其左右两边的值总相等时,这样的等式叫做恒等式.

2. (1)含有未知数的等式称为方程.使方程左、右两边的值相等的未知数的值叫做方程的解.只含有一个未知数的方程的解,也叫做根.求方程的解的过程叫做解方程.

(2)如果两个方程的解相同,那么这两个方程叫做同解方程.运用上述等式的两条性质所得的方程与原方程是同解方程.

3. (1)解一元一次方程的一般步骤、具体做法、依据及每步的做法、注意事项,归纳成下表:

变形名称	具体做法	依据	注意事项
去分母	在方程两边都乘以各分母的最小公倍数.	等式性质2.	(1)不要漏乘不含分母的项; (2)分子是代数式要加括号.
去括号	先去小括号,再去中括号,最后去大括号.(由内向外去括号)	分配律,去括号法则.	(1)不漏乘括号内各项; (2)注意若括号前是"负号",括号内各项要变号.
移项	把含有未知数的项都移到方程的一边,其他项都移到方程另一边,记住移项要变号.	移项法则.	(1)移项要变号,未移的项不变号; (2)不要漏项.
合并同类项	把方程化成 $ax=b(a\neq0)$ 的形式.	合并同类项法则.	(1)系数相加; (2)字母及其指数不变.
系数化为1	在方程两边除以未知数的系数 a,得到方程的解 $x=\frac{b}{a}$.	等式性质2.	分子、分母不要搞颠倒.

解方程时,表中有些变形步骤可能用不到,并且也不一定按照自上而下的顺序,要根据方程的形式灵活安排求解步骤.适当进行合并简化.

(2)方程 $ax+b=0$(其中 x 是未知数,a,b 是已知数)当 $a\neq0$ 时有惟一解 $x=-\frac{b}{a}$,当 $a=0$,$b=0$ 时,x 可为任意有理数,当 $a=0$,$b\neq0$ 时,无解.

例 题 精 讲

例1 解方程:

$$\frac{1}{2}\{\frac{1}{2}[\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x-2)-2]-2\}-2=2.$$

解 原方程可变为

$$\frac{1}{2}[\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x-2)-2]-2=8,$$

又可得

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x-2)-2=20,$$

$$\frac{1}{2}x-2=44.$$

解得 $x=92$.

注 根据方程结构特点,这里选择了先移项再去分母,同时也去掉了一个括号的方式.若采用先去分母,去括号,则解法要复杂得多.

例2 解方程:

$$\frac{1}{9}\{\frac{1}{7}[\frac{1}{5}(\frac{x+2}{3}+4)+6]+8\}=1.$$

解 原方程可变为

$$\frac{1}{7}[\frac{1}{5}(\frac{x+2}{3}+4)+6]=1,$$

进而又可得

$$\frac{1}{5}(\frac{x+2}{3}+4)=1,$$

$$\frac{x+2}{3}=1.$$

解得 $x=1$.

注 根据方程结构特点,这里选择了先去分母再移项,同时去掉一个括号的方式.

例3 解方程:

$$\frac{3}{2}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}x+1\right)+2\right]-2\frac{1}{2}=\frac{2}{3}x.$$

分析 注意到$\frac{3}{2}$与$\frac{2}{3}$互为倒数，$\frac{3}{2}\times 2$为整数，因此，解方程时先去中括号较为适宜.原方程可变为

$$\left(\frac{1}{4}x+1\right)+3-2\frac{1}{2}=\frac{2}{3}x,$$

即
$$\frac{1}{4}x+1+3-2\frac{1}{2}=\frac{2}{3}x.$$

解得 $x=3\frac{3}{5}$.

例 4 解方程：

$$1-\frac{x-\frac{1+x}{3}}{3}=\frac{x}{2}-\frac{2x-\frac{10-7x}{3}}{2}.$$

分析 方程两边都是繁分式，可先进行化简：

$$1-\frac{x-\frac{1+x}{3}}{3}=1-\frac{3x-(1+x)}{9}=\frac{10-2x}{9},$$

$$\frac{x}{2}-\frac{2x-\frac{10-7x}{3}}{2}=\frac{\frac{10-7x}{3}-x}{2}=\frac{10-10x}{6}=\frac{5-5x}{3},$$

于是，原方程可变为

$$\frac{10-2x}{9}=\frac{5-5x}{3},$$

去分母，得

$$10-2x=3(5-5x).$$

解得 $x=\frac{5}{13}$.

注 本题也可以两边同乘以 6，先去分母再求解.

例 5 解方程：$\frac{3}{2}|x+5|-5=0$.

分析 先将$|x+5|$看作一个整体，原方程可变为

$$|x+5|=\frac{10}{3}.$$

根据绝对值的意义可知

$$x+5=\frac{10}{3},$$

或
$$x+5=-\frac{10}{3},$$

所以 $x=-1\frac{2}{3}$,或 $x=-8\frac{1}{3}$.

例 6 已知方程 $2(x+1)=3(x-1)$ 的解为 $a+2$,求方程 $2[2(x+3)-3(x-a)]=3\times 3$ 的解.

解 由方程 $2(x+1)=3(x-1)$ 解得 $x=5$. 由题设知 $a+2=5$,所以 $a=3$. 于是有

$$2[2(x+3)-3(x-3)]=3\times 3,$$
$$-2x=-21.$$

所以,$x=10\frac{1}{2}$.

例 7 若方程

$$\frac{1-2x}{6}+\frac{x+1}{3}=1-\frac{2x+1}{4} \quad ①$$

与关于 x 的方程

$$x+\frac{6x-a}{3}=\frac{a}{6}-3x \quad ②$$

的解相同,求 a 的值.

解 ①可变为

$$2(1-2x)+4(x+1)=12-3(2x+1).$$

解得 $x=\frac{1}{2}$,把 $x=\frac{1}{2}$ 代入②得

$$\frac{1}{2}+\frac{6\times\frac{1}{2}-a}{3}=\frac{a}{6}-3\times\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2}+1-\frac{a}{3}=\frac{a}{6}-\frac{3}{2},$$

解得 $a=6$.

例 8 解关于 x 的方程：

$$ax+b-\frac{3x+2ab}{3}=\frac{1}{2}.$$

解 原方程可变为

$$6(ax+b)-2(3x+2ab)=3,$$
$$6ax+6b-6x-4ab=3,$$
$$6(a-1)x=3-6b+4ab. \qquad ①$$

(i)当 $a\neq 1$ 时，$x=\dfrac{3-6b+4ab}{6(a-1)}$.

(ii)当 $a=1$ 时，①变为

$$0\cdot x=3-2b.$$

若 $b=\dfrac{3}{2}$，则 x 可为任意有理数；若 $b\neq\dfrac{3}{2}$，则方程无解.

例 9 若 a,b,c 是正数，解方程：

$$\frac{x-a-b}{c}+\frac{x-b-c}{a}+\frac{x-c-a}{b}=3.$$

解 原方程可变为

$$\left(\frac{x-a-b}{c}-1\right)+\left(\frac{x-b-c}{a}-1\right)+\left(\frac{x-c-a}{b}-1\right)=0.$$

即
$$\frac{x-a-b-c}{c}+\frac{x-a-b-c}{a}+\frac{x-a-b-c}{b}=0,$$
$$(x-a-b-c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=0. \qquad ①$$

因 a,b,c 都是正数，所以 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\neq 0$，由①解得 $x=a+b+c$.

练 习 六

一、填空题

1. 方程$\dfrac{\dfrac{3}{4}x-2\dfrac{1}{2}}{\dfrac{3}{8}+0.125}=2.5$的根是______.

2. 满足方程$|2000x-2000|=2000$的x的值是______.

3. 若方程$19x-a=0$的解是$19-a$,则$a=$______.

4. 已知关于x的方程$a(2x-1)=3x-2$无解,则$a=$______.

5. 已知方程$3(x+2)=5x$与$4x-3(a-x)=6x-7(a-x)$有相同的解,则$a=$______.

二、解答题

6. 解方程:$x-\dfrac{1}{4}(1-\dfrac{3x}{2})-\dfrac{1}{3}(2-\dfrac{x}{4})=2+\dfrac{35x}{24}$.

7. 解方程:$\dfrac{1-\dfrac{1+\dfrac{1}{2}(1-x)}{3}}{4}=1$.

8. 解方程:$\dfrac{x-1}{0.3}-2x=\dfrac{0.1x+0.2}{0.05}$.

9. 已知-2是关于x的方程$\dfrac{1}{3}mx=5x+(-2)^2$的解,求代数式$(m^2-1)(m+17)^{2001}$的值.

10. 解关于x的方程$(m+1)(m-1)x+(m-2)(1-m)=0$.

11. 若$abc=1$,解方程:

$$\frac{2ax}{ab+a+1}+\frac{2bx}{bc+b+1}+\frac{2cx}{ca+c+1}=1.$$

第七讲　一元一次方程的应用

知 识 点 和 方 法 述 要

1．列方程解应用题是代数中的重要内容之一，列出一元一次方程解应用题是数学联系实际解决实际问题迈出的重要一步．列出一元一次方程解应用题的一般步骤是：

(i)弄清题意和题目中的已知数、未知数及数量关系．用字母(如x)表示题目中的一个未知数．

(ii)找出能够表示应用题全部含义的一个相等关系．

(iii)根据这个相等关系列出需要的代数式，从而列出方程．

(iv)解这个方程，求出未知数的值．

(v)检验、写出答案(包括单位名称)．

(ii)、(iii)两步是关键，探求相等关系，必须认真审题，仔细分析，适当地变换观察角度，注意借助图示、表格揭示已知量、未知量之间的关系．“相等关系”常常不是惟一的，因此，我们要找的相等关系应能够表示应用题的全部含义，应有利于设未知数，列出方程两边的代数式．

设未知数可分为直接设未知数、间接设未知数两类．直接设未知数指题目中问什么就设什么．它多适用于要求的未知数只有一个的情况．间换设未知数，顾名思义就是问东设西，迂回前进．如求整体时，可先设其某部分为x；求部分时，又可设其整体为未知数；求速度时，先设路程为未知数；求工作时间时设工作效率为未知数．

解完方程还要检查方程的解作为应用题的答案是否合理．

2．几类应用题常用策略

(1)和、差、倍、分问题：抓住关键词列方程．

(2)形积变化问题：利用各种几何图形的面积、体积公式，列出相

等关系.

(3)行程问题

(i)相遇(相向)问题:双方所走路程之和=全部路程.

(ii)追及(同向)问题:如甲从相同出发点追及乙,则相等关系一般是:甲所走路程=乙所走路程.

注意时针问题中,一圈为60分格,分针速度为1分格/分,时针速度为$\frac{1}{12}$分格/分.

(iii)航行问题:注意航行速度与水(风)速的关系:

顺水速度=船在静水中的速度+水流速度;

逆水速度=船在静水中的速度-水流速度;

船在静水中的速度$=\frac{\text{顺流速度}+\text{逆流速度}}{2}$;

水流速度$=\frac{\text{顺流速度}-\text{逆流速度}}{2}$.

行程中的基本关系是$s=vt$,其中s表示距离,v表示速度,t表示时间.通常用行程示意图帮助分析题意.

(4)调配问题:其等量关系反映在调动前后的数量关系上.抓住“相等”、“几倍”、“多”、“少”等词语常可找出相等关系.可辅之表格帮助分析数量关系.

(5)按比例分配问题:若已知两个量之比是$m:n$,则可设其中一份为x,两量分别为mx,nx.

(6)工程问题:基本数量关系是:工作量=工作效率×工作时间.若工作量未给出具体数量,则常设为“1”.

(7)浓度配比问题:基本数量关系是:

溶液重量=溶质重量+溶剂重量;

浓度$=\frac{\text{溶质重量}}{\text{溶液重量}}\times 100\%=\frac{\text{溶质重量}}{\text{溶质重量}+\text{溶剂质量}}\times 100\%$.

常利用配制前后溶质不变的关系列出方程.

(8)数字问题:注意区分“数”与“数字”两个概念.多用间接设元的方式,设某一数位上的数字为x,其他数位上的数用它的代数式表

示.在数的表示式中,注意各数位上的数为10的幂的形式.

例 题 精 讲

例1 一队学生从甲地到乙地,速度为每小时8千米,当行进2千米路后,通讯员奉命回到甲地取东西.他以每小时10千米的速度回甲地取了东西后,立即以同样速度追赶队伍,结果在距乙地3千米处追上队伍.求甲、乙两地的距离(取东西的时间不计).

分析一 画出示意图7-1:

图中A为"通讯员奉命回甲地取东西"处.B为"通讯员追上学生队伍"处.

甲 A B 乙

图7-1

设甲、乙两地距离为x千米,通讯员从A处返回到甲地再追上队伍所用时间等于学生队伍从A到B所用时间,故有

$$\frac{x-3+2}{10}=\frac{x-2-3}{8}.$$

解得$x=21$.

分析二 设A、B两地距离为x千米,则通讯员从A处返回到甲再追上队伍所走路程为$(x+2\times2)$(千米),如**分析一**,有

$$\frac{x+2\times2}{10}=\frac{x}{8}.$$

解得$x=16$.甲、乙两地距离为

$$x+2+3=16+2+3=21(\text{千米}).$$

分析三 通讯员从A处返回甲地再到B处所行路程,等于学生队伍从A处到B处所行路程加上从A处到甲地路程的2倍.设学生队伍从A处到B处走了x小时,则有

$$10x=8x+2\times2.$$

解得$x=2$.故甲、乙两地距离为

$$8x+2+3=8\times2+2+3=21(\text{千米}).$$

注 分析一、分析二从"时间"角度分析题意，寻找相等关系，列出方程. 前者设直接未知数，后者设间接未知数. 分析三则从"路程"角度出发，寻找相等关系，列出方程. 上述分析说明，同一问题所蕴含的相等关系可能有多种，未知数的设法也可灵活多变.

例 2 从 A 地步行到 B 地，然后再返回原地，路上共花了 3 小时 41 分钟，由 A 到 B 的道路先是上坡，中间是平地，然后是下坡. 如果步行速度上坡是 4 公里/时，平地是 5 公里/时，下坡是 6 公里/时，AB 的距离是 9 公里，问平地的路程有多少公里？

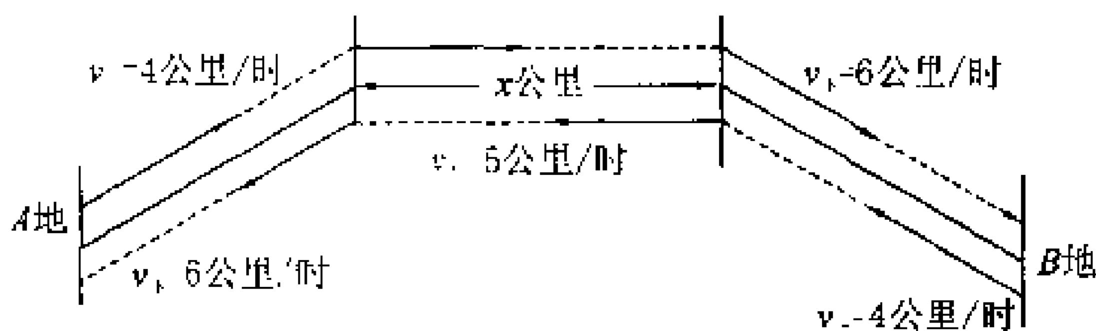


图 7 - 2

分析 如图 7 - 2，设平地的路是 x 公里，由于从 A 到 B 又返回原地走了一个来回，因此平地走了 $2x$ 公里，上坡走了 $(9-x)$ 公里，下坡也走了 $(9-x)$ 公里，走平地花了 $\frac{2x}{5}$ 小时，上坡花了 $\frac{9-x}{4}$ 小时，下坡花了 $\frac{9-x}{6}$ 小时. 依题设，有

$$\frac{2x}{5}+\frac{9-x}{4}+\frac{9-x}{6}=3\frac{41}{60}.$$

化简得 $$12\times 2x+15(9-x)+10(9-x)=221.$$

解得 $x=4$.

例 3 甲、乙两人各坐一游艇在湖中划行，甲摇桨 10 次时，乙只摇桨 8 次；而乙摇桨 70 次所走的路程等于甲摇桨 90 次所走的路程. 现甲先摇桨 4 次，问乙摇几次才能追上甲？

解 设乙摇桨 x 次追上甲，则在这段时间内甲摇桨 $\frac{10}{8}x$ 次，甲在行进中总共摇桨 $(\frac{10}{8}x+4)$ 次. 把甲摇桨一次前进的路程作为一个单

位，那么乙摇桨一次前进的路程为$\frac{90}{70}$个单位. 当乙追上甲时，两船所走的路程相等，故有

$$\frac{10}{8}x+4=\frac{90}{70}x.$$

解之，得 $x=112$.

答　乙摇 112 次才能追上甲.

例 4　一条船往返于甲、乙两港之间，由甲至乙是顺水行驶，由乙至甲是逆水行驶. 已知船在静水中的速度为每小时 8 千米，平时顺行与逆行所用时间比为 1∶2. 某天恰逢暴雨，水流速度变为原来的 2 倍，这条船往返共用了 9 小时，那么甲、乙两港相距多少千米？

解　设原来水速为 x 千米/时，则平时顺行速度是逆行速度的 2 倍，有

$$8+x=2(8-x).$$

解得 $x=\frac{8}{3}$.

设甲、乙两港相距 s 千米，依题设，有

$$\frac{s}{8+2\times\frac{8}{3}}+\frac{s}{8-2\times\frac{8}{3}}=9.$$

解得 $s=20$.

答　甲、乙两港相距 20 千米.

例 5　据了解，个体服装销售只要高出进价的 20% 便可盈利，但老板们常以高出进价的 50%—100% 标价，假如你准备买一件标价为 200 元的服装，应在什么范围内还价？

分析　还价必须高于进价的 20%，老板才会将服装卖出，故应由通常标价估算出进货价再高出 20% 左右还价.

设这件服装的进价为 x 元，如果老板以高出进价的 50% 标价，则

$$(1+50\%)x=200.$$

解得 $x \approx 133$；如果老板以高出标价的 100% 标价，则

$$(1+100\%)x=200.$$

解得 $x=100$. 可见进价在 100 元 ~ 133 元之间，因此还价范围可定为 120 ~ 160 元.

例 6 我们在运动场上踢的足球大多是由许多小黑白块的皮缝合而成的. 李强和王凯两位同学，在踢足球的休息之余研究起足球上的黑、白块的个数，结果发现黑块均呈五边形，白块均呈六边形（如图 7－3）. 由于黑、白相间，李强好不容易才数清了黑块共 12 块，而王凯数白块时不是重就是遗漏，无法点清白块的个数，你能帮助他解决这一问题吗？


图 7－3

分析 黑块呈五边形，白块呈六边形. 每块黑皮的五边分别与五块白皮的一边缝合在一起. 而每块白皮的三条边分别和三块黑皮缝合在一起.

设白皮共有 x 块，则它共有 $6x$ 条边，其中与黑皮缝合在一起的边数是 $3x$ 条. 已数出黑皮共有 12 块，每块黑皮共有 5 边，所以黑皮共有 5×12 条边. 依题意，有

$$3x=5\times12.$$

解得 $x=20$.

答 白皮共有 20 块.

例 7 在 4 点钟与 5 点钟之间，何时时针与分针在同一直线上？

解 设两针从整 4 点开始 x 分针后成一直线.

(i)当两针重合时，依题意，有

$$x=\frac{x}{12}+20.$$

解得 $x=21\frac{9}{11}$.

(ii)当两针成一直线而不重合时，依题意有

$$x=\frac{x}{12}+20+30.$$

解得 $x=54\frac{6}{11}$.

答 当两针成一直线时，是4点$21\frac{9}{11}$分或4点$54\frac{6}{11}$分.

例8 一个三位数三个数字和是24，十位数字比百位数字少2.如果这个三位数减去两个数字都与百位数字相同的一个两位数所得的数也是三位数，而这个三位数三个数字的顺序与原来三位数的数字的顺序恰好相反，求原来的三位数.

解 设百位数字为 x，则十位数字为 $x-2$，个位数字为

$$24-x-(x-2)=26-2x.$$

因此，原来的三位数为

$$100x+10(x-2)+26-2x,$$

而减去的两位数为 $10x+x$. 依题意，有

$$100x+10(x-2)+26-2x-(10x+x)=100(26-2x)+10(x-2)+x.$$

解得 $x=9$. 于是 $x-2=7$，$26-2x=8$. 原来的三位数为978.

练 习 七

1. 某中学开展校外植树活动，让初一学生单独种值，需要7.5小时完成；让初二学生单独种值，需要5小时完成，现在让初一、初二学生先一起种值1小时，再由初二学生单独完成剩余部分，共需多少时间完成？

2. 有一架飞机，最多能在空中连续飞行4小时，它在飞出与返回时的速度分别为950千米/时和850千米/时. 问这架飞机最远飞出多少千米能返回(答案只保留整数部分)？

3. 某公司有甲、乙两个工程队，甲队人数比乙队人数的$\frac{2}{3}$多28人. 现因任务需要，从乙队调走20人到甲队，这时甲队人数是乙队人

数的 2 倍.求甲、乙两队原来各有多少人?

4. 若进货价降低 8%,而售出价不变,那么利润由目前的 $p\%$ 增加到$(p+10)\%$,求 p.

5. 希腊数学家丢番图(公元 3 - 4 世纪)的墓碑上记载着:"他生命的六分之一是幸福的童年;再活了他寿命的十二分之一,两颊长起了细细的胡须;他结了婚,又度过了一生的七分之一;再过五年,他有了儿子,感到很幸福;可是儿子只活了他父亲全部年龄的一半;儿子死后,他在极度悲痛中度过了四年,也与世长辞了。"请回答:

(1)他结婚的年龄;

(2)他开始当爸爸的年龄;

(3)他儿子死时他的年龄;

(4)他去世时的年龄.

6. 某中学组织初一同学春游,如果租用 45 座的客车,则有 15 个人没有座位;如果租用同样数量的 60 座的客车,则除多出一辆外,其余车恰好坐满.已知租用 45 座的客车日租金为每辆车 250 元,60 座的客车日租金为每辆 300 元,问租用哪种客车更合算?租几辆车?

7. 要在含酒精 50% 的 800 克酒中,倒入含酒精 85% 的酒多少克,才能配成含酒精 75% 的酒?

8. 一辆车身长 $12\frac{2}{9}$ 米的汽车从甲站以 30 千米/时的速度开往乙站,于上午 10 点 34 分在离乙站 800 米处遇到从乙站出发走向甲站的行人,1 秒钟后汽车离开这个行人,行人继续向甲站走去,汽车到达乙站 1 小时 20 分钟后,从乙站返回甲站,问:什么时候汽车追上那位行人?

9. 一农场的工人们要把两片草地的草锄掉,大的一片地的面积是小的一片面积的两倍.上午工人们都在大的一片地上锄草,午后工人们对半分开:一半人留在大的草地上,工作到傍晚就把草地锄完了;另一半人到小片草地上去锄,到傍晚还剩下一块,第二天由一个人去锄,恰好要一天的工夫.这个农场有多少工人?

10. 下表显示了某次钓鱼比赛的结果，上行的值表示钓到的鱼数，下行的值表示钓到几条鱼的参赛人数.

n	0	1	2	3	…	13	14	15
钓到 n 条鱼的人数	9	5	7	23	…	5	2	1

当天的报纸对这次比赛做了如下报道：

(A)获胜者钓到 15 条鱼；

(B)对钓到 3 条或 3 条以上的鱼的所有参赛者来说，每人平均钓到 6 条鱼；

(C)对钓到 12 条或 12 条以下的鱼的所有参赛者来说，每人平均钓到 5 条鱼.

问：本次比赛钓到的鱼的总数是多少？

第八讲　二(三)元一次方程组

知识点和方法述要

1.(1)含有两个未知数,并且未知项的次数是1的方程叫做二元一次方程.两个含相同未知数的二元一次方程合在一起,就组成了一个二元一次方程组.

(2)使二元一次方程两边的值都相等的两个未知数的使,叫做二元一次方程的解.一般而言,一个二元一次方程有解时,解不惟一.二元一次方程组中两个方程,共同的解叫做二元一次方程组的解.

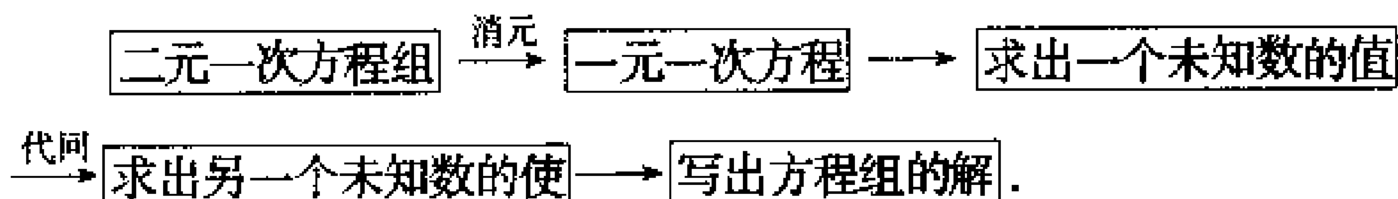
(3)二元一次方程组$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$的解的情况:

(i)当$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$时,方程组有惟一解;

(ii)当$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$时,方程组无解;

(iii)当$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$时,方程组有无穷多组解.

2.(1)解二元一次方程组一般步骤是:



其中消元、将二元一次方程组转化为一元一次方程组是关键的一步.

(2)消元的方法有代入消元法和加减消元法.一般而言,我们总可以由方程组中的某个方程,将某一个未知数用关于另一个未知数的代数式表示,用代入消元法解之.但实际上,选用何种消元法取决于方程组所具有的特点.灵活地选取可以简化计算.就代入消元法而

言，有时可作整体代入.

3. 方程组有三个未知数，每个方程组的未知项的次数都是1，并且一共有三个方程，这样的方程组叫做三元一次方程组.

解简单的三元一次方程组的基本做法与解二元一次方程组类似，采用代入法或加减消元法，由三元一次方程组向二元一次方程组、一元一次方程转化.

4. 解一次方程组的基本思想：通过逐步消元解决问题，把"三元"转化为"二元"，再把"二元"转化为"一元". 这种逐步消元的思想可以推广到"四元"、"五元"等"多元"的方程组.

例 题 精 讲

例1 解方程组$\begin{cases}\dfrac{x-y}{7}-\dfrac{x+y}{6}=\dfrac{1}{2},\\ 2(x-y)-5(x+y)+1=0.\end{cases}$

解一 经整理，原方程组可变为

$$\begin{cases} x+13y=-21, & ①\\ 3x+7y=1. & ②\end{cases}$$

由①得 $x=-13y-21,$ ③

③代入②，得

$$3(-13y-21)+7y=1,$$

化简得 $32y=-64,$

所以 $y=-2$. 把 $y=-2$ 代入③得

$$x=-13\times(-2)-21=5.$$

所以 $\begin{cases}x=5,\\ y=-2.\end{cases}$

解二 同解一得①，②.

①×3－②得 $32y=-64,$

解得 $y=-2$. 把 $y=-2$ 代入①得

$$x+13\times(-2)=-21.$$

解得 $x=5$.

所以 $\begin{cases}x=5,\\y=-2.\end{cases}$

解三 设 $x-y=m, x+y=n$,原方程组可变为

$$\begin{cases}6m-7n=21, & ④\\2m-5n=-1. & ⑤\end{cases}$$

④ − ⑤ × 3 得 $$8n=24,$$

解得 $n=3$.将 $n=3$ 代入④得

$$6m-7\times3=21.$$

解得 $m=7$.所以,有

$$\begin{cases}x-y=7, & ⑥\\x+y=3. & ⑦\end{cases}$$

$\frac{⑥+⑦}{2}$得 $$x=5,$$

$\frac{⑥-⑦}{2}$得 $$y=-2.$$

所以 $\begin{cases}x=5,\\y=-2.\end{cases}$

注 **解**一采用代入消元法,解二采用加减消元法,解三则采用先换“元”得到关于 m,n 的较简单的方程组,求得 m,n 后,再用加减消元法解方程组 $\begin{cases}x-y=7,\\x+y=3.\end{cases}$ 这样做计算十分简便.可见**解**一次方程组方法可灵活多变,首先要注意多观察、分析方程组的特点,权衡利弊,再确定解题的适当方法.

例 2 解方程组

$$\begin{cases}5.3x+4.7y=12, & ①\\4.7x+5.3y=88. & ②\end{cases}$$

解 ① + ②得

$$10x+10y=200,$$

即 $$x+y=20.\quad ③$$

①－②得

$$0.6x-0.6y=24,$$

即 $$x-y=40.\quad ④$$

$\dfrac{③+④}{2}$得 $$x=30,$$

$\dfrac{③-④}{2}$得 $$y=-10.$$

所以 $\begin{cases}x=30,\\y=-10.\end{cases}$

例3 甲、乙两人解方程组

$$\begin{cases}ax+5y=13, & ①\\4x-by=-2. & ②\end{cases}$$

由于甲看错了方程①中的 a 而得到方程组的解为$\begin{cases}x=-3,\\y=-1;\end{cases}$乙看错了方程②中的 b 而得到的解为$\begin{cases}x=5,\\y=4.\end{cases}$ 假如按正确的 a,b 计算，试求出原方程的解.

分析 因为甲只看错了方程①中的 a，所以甲所得到的解$\begin{cases}x=-3\\y=-1\end{cases}$应满足无 a 的正确的方程②，即

$$4\times(-3)-b\times(-1)=-2.\quad ③$$

同理，$\begin{cases}x=5,\\y=4\end{cases}$应满足无 b 的正确的方程①，即

$$a\times5+5\times4=13.\quad ④$$

解由③，④联立的方程组得

$$\begin{cases}a=-1\dfrac{2}{5},\\b=10.\end{cases}$$

所以原方程组应为

$$\begin{cases}-1\frac{2}{5}x+5y=13,\\4x-10y=-2.\end{cases}$$

解之,得 $\begin{cases}x=20,\\y=8.2.\end{cases}$

例4 已知关于 x,y 的方程组 $\begin{cases}2x-3y=3\\ax+by=-1\end{cases}$ 与方程组 $\begin{cases}3x+2y=11\\2ax+3by=3\end{cases}$ 的解相同,求 a,b 的值.

分析 既然两个方程组的解相同,那么第一个方程组的解也就是方程组 $\begin{cases}2x-3y=3\\3x+2y=11\end{cases}$ 的解. 易得方程组 $\begin{cases}2x-3y=3\\3x+2y=11\end{cases}$ 的解为 $\begin{cases}x=3,\\y=1.\end{cases}$ 将 $\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$ 代入 $ax+by=-1$ 和 $2ax+3by=3$ 得

$$\begin{cases}3a+b=-1, & ①\\6a+3b=3. & ②\end{cases}$$

②-①×2得 $b=5$.

将 $b=5$ 代入①得 $a=-2$.

所以 $\begin{cases}a=-2,\\b=5.\end{cases}$

例5 解方程组

$$\begin{cases}x+2y=5, & ①\\y+2z=8, & ②\\z+2u=11, & ③\\u+2x=6. & ④\end{cases}$$

解一 由①,④消去 x,得

$$\begin{cases}y+2z=8, & ⑤\\z+2u=11, & ⑥\\-4y+u=-4. & ⑦\end{cases}$$

⑥-7×②得

$$8y+z=19. \quad ⑧$$

由⑤,⑧得$\begin{cases} y=2, \\ z=3. \end{cases}$

将 $y=2$ 代入①得 $x=1$,将 $z=3$ 代入③得 $u=4$. 所以

$$\begin{cases} x=1, \\ y=2, \\ z=3, \\ u=4. \end{cases}$$

解二 由原方程组得

$$\begin{cases} x=5-2y, & ⑨ \\ y=8-2z, & ⑩ \\ z=11-2u, & ⑪ \\ u=6-2x. & ⑫ \end{cases}$$

由⑨,⑩,⑪,⑫可得

$$\begin{aligned} x &= 5-2(8-2z)=-11+4z=-11+4(11-2u) \\ &= 33-8u=33-8(6-2x)=-15+16x, \end{aligned}$$

即

$$x=-15+16x.$$

解得 $x=1$. 将 $x=1$ 代入⑫得 $u=4$,将 $u=4$ 代入⑪得 $z=3$,将 $z=3$ 代入⑩得 $y=2$. 所以

$$\begin{cases} x=1, \\ y=2, \\ z=3, \\ u=4 \end{cases}$$

是原方程组的解.

解三 ①+②+③+④得

$$x+y+z+u=10. \quad ⑬$$

⑬-[①+③]得

$$y+u=6. \quad ⑭$$

①×2-④得

$$4y-u=4. \quad ⑮$$

⑭+⑮得 $y=2$.以下略.

例 6 解方程组

$$\begin{cases}2x+3y-4z=-7,\\ \dfrac{x-4y}{3}=\dfrac{2y+3z}{2}=2.\end{cases}$$

解 原方程可变为

$$\begin{cases}2x+3y-4z=-7, & ①\\ \dfrac{x-4y}{3}=2, & ②\\ \dfrac{2y+3z}{2}=2. & ③\end{cases}$$

由②得 $x=6+4y$,由③得 $z=\frac{1}{3}(4-2y)$,代入①得

$$2(6+4y)+3y-4[\frac{1}{3}(4-2y)]=-7.$$

解得 $y=-1$.于是 $x=6+4\times(-1)=2, z=\frac{1}{3}[4-2\times(-1)]=2$.所以,原方程组的解为$\begin{cases}x=2,\\ y=-1,\\ z=2.\end{cases}$

例 7 解方程组

$$\begin{cases}6x-3y-2|x+y|=1,\\ 3|x+y|-4x+2y=11.\end{cases}$$

解 原方程可变为

$$\begin{cases}3(2x-y)-2|x+y|=1,\\ -2(2x-y)+3|x+y|=11.\end{cases}$$

设 $a=2x-y, b=|x+y|$,则方程组可变为

$$\begin{cases}3a-2b=1,\\ -2a+3b=11.\end{cases}$$

由上面方程组可解得$\begin{cases}a=5,\\b=7.\end{cases}$即

$$\begin{cases}2x-y=5,\\|x+y|=7.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}2x-y=5,\\x+y=7,\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}2x-y=5,\\x+y=-7.\end{cases}$$

解得$\begin{cases}x=4,\\y=3,\end{cases}$或$\begin{cases}x=-\dfrac{2}{3},\\y=6\dfrac{1}{3}.\end{cases}$

例 8 根据下面的方程组,求 $z-y$ 的值.

$$\begin{cases}1996(x-y)+1997(y-z)+1998(z-x)=0, & ①\\1996^2(x-y)+1997^2(y-z)+1998^2(z-x)=1997. & ②\end{cases}$$

解 设 $x-y=a,y-z=b,z-x=c$,则

$$a+b+c=0. \qquad ③$$

①,②变为

$$1996a+1997b+1998c=0, \qquad ④$$

$$1996^2a+1997^2b+1998^2c=1997. \qquad ⑤$$

③×1997－④得 $a=c$,代入③得 $b=-2c$.代入⑤得

$$(1996^2-2\times1997^2+1998^2)c=1997,$$

解得 $2c=1997$.所以

$$z-y=-b=2c=1997.$$

例 9 求下列关于 x,y 的方程组的解及 k 的值.

$$\begin{cases}x+(1+k)y=0, & ①\\(1-k)x+ky=1+k, & ②\\(1+k)x+(12-k)y=-(1+k). & ③\end{cases}$$

解 ②+③得 $x=-6y$. ④

将 $x=-6y$ 代入①得

$$(k-5)y=0. \qquad ⑤$$

当 $k=5$ 时,原方程组可变为

$$\begin{cases}x+6y=0,\\-4x+5y=6,\\6x+7y=-6.\end{cases}$$

解此方程组得 $\begin{cases}x=-1\dfrac{7}{29},\\y=\dfrac{6}{29}.\end{cases}$

当 $k\neq5$ 时,由⑤得 $y=0$,由④得 $x=0$.将 $\begin{cases}x=0,\\y=0\end{cases}$ 代入②得 $k=-1$. $k=-1$ 时方程组解为 $\begin{cases}x=0,\\y=0.\end{cases}$

综上所述,当 $k=-1$ 时,方程组为 $\begin{cases}x=0,\\y=0.\end{cases}$ 当 $k=5$ 时,方程组解为 $\begin{cases}x=-1\dfrac{7}{29},\\y=\dfrac{6}{29}.\end{cases}$

练 习 八

一、填空题

1. 已知 $\begin{cases}x=2,\\y=3\end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases}ax=by,\\x-2a=y+b\end{cases}$ 的解,则 $a+b=$______.

2. 适合方程组 $\begin{cases}x-2y+3z=0,\\2x-3y+4z=0\end{cases}$ 的 $x:y:z$ 的值为______.

3. 方程组 $\begin{cases}x-y-z=5,\\y-z-x=1,\\z-x-y=-15\end{cases}$ 的解是______.

4. 如果 x,y 满足$\begin{cases}|x|+x+y=10,\\ x+|y|-y=12,\end{cases}$则 $x+y=$______.

二、解答题

5. 解方程组

$$\begin{cases}1-30\%\cdot(a-2)=20\%\cdot b+0.2,\\ 25\%\cdot a-0.75=\dfrac{4b-21}{20}.\end{cases}$$

6. 解方程组

$$\frac{5x-(1-11y)}{8}=\frac{5y-6x+2}{9}=\frac{3x+4y+7}{6}.$$

7. 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{2x+y}{5}+\dfrac{y-x}{3}=\dfrac{2}{3},\\ \dfrac{3(2x+y)}{10}+\dfrac{3(y-x)}{2}=0,\\ \dfrac{x-z}{3}-\dfrac{y-z}{2}=0.\end{cases}$$

8. 已知关于 x,y 的一次方程 $(a-1)x+(a+2)y+5-2a=0$，当 a 每取一个值时就有一个方程，而这些方程有一个公共解．你能求出这个公共解，并说明对任何有理数它都能使方程成立吗？

9. 解方程组

$$\begin{cases}x-y+z=1,\\ y-z+u=2,\\ z-u+v=3,\\ u-v+x=4,\\ v-x+y=5.\end{cases}$$

10. 若方程组$\begin{cases}3x+4y=m-4,\\ x-26=3m+2\dfrac{1}{2}\end{cases}$的解满足 $x+y=0$，试求 m 的值．

第九讲　一次方程组的应用

知识点和方法述要

列一次方程组解应用题的一般步骤是：

(1)审题：弄清题意和题目中的数量关系.

(2)设元：可直接设元，也可间接设元，关键是有利于建立方程组解决问题.

(3)列方程组：根据题目中的全部含义，找出所需相等关系，依此列出方程.通常是有几个未知数就需列出几个彼此独立的方程.这是问题解决的关键.

(4)解方程组：解所列出的方程组，求出未知数的值.

(5)检验作答：检验所求的解是否符合题目的实际意义，然后写出答案.

例题精讲

例1　小明去年2月在小卖店买了3本练习本和5包盐正好用去5元钱.今年三月，他又带5元钱去该店买同样的练习本和食盐.因为练习本每本比去年涨价1角，食盐每包涨价5分，小明就只好买了3本练习本和4包盐，结果找回2角钱.试问去年2月每本练习本多少元？每包食盐多少元？

解　设去年2月练习本每本x元，盐每包y元，则今年3月练习本每本$(x+0.1)$元，盐每包$(y+0.05)$元.依题意，有

$$3x+5y=5, \quad ①$$

$$3(x+0.1)+4(y+0.05)=5-0.2. \quad ②$$

②化简得

$$3x+4y=4.3. \quad ③$$

①－③得　$y=0.7$.

将 $y=0.7$ 代入①得 $x=0.5$

答　去年2月每本练习本5角，每包食盐7角.

例2　汽车在平路上每小时走30公里，上坡路每小时行28公里，下坡路每小时走35公里.现有142公里的路程，去的时候用4小时30分钟，回来时用4小时42分钟.这段路的平路有多少公里？去的时候上坡路、下坡路各有多少公里？

解　设这段路的平路有 x 公里，去的时候上坡路有 y 公里，那么下坡路有 $(142-x-y)$ 公里.依题意，得

$$\begin{cases} \dfrac{x}{30}+\dfrac{y}{28}+\dfrac{142-x-y}{35}=4\dfrac{1}{2}, & ① \\ \dfrac{142-x-y}{28}+\dfrac{x}{30}+\dfrac{y}{35}=4\dfrac{7}{10}. & ② \end{cases}$$

①，②化简得

$$\begin{cases} 2x+3y=186, & ③ \\ x+3y=156. & ④ \end{cases}$$

③－④得 $x=30$. 把 $x=30$ 代入④得 $y=42$. 于是，有

$$142-x-y=142-30-42=70.$$

答　这段路的平路有30公里，去的时候上坡路有42公里，下坡路有70公里.

例3　某个三位数除以它各数位上的数字的和的9倍，得到的商为3.已知百位上的数字与个位上的数字的和比十位上的数字大1.如果把数位上的数字顺序颠倒，则所得的新数比原数大99.试求这个三位数.

解　设这个三位数的百位上的数字为 x，十位上的数字为 y，个位上的数字为 z.依题意，得

$$\begin{cases}100x+10y+z=3\times 9(x+y+z),\\ x+z=y+1,\\ 100z+10y+x-(100x+10y+z)=99.\end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases}73x-17y-26z=0,\\ x-y+z=1,\\ x-z=-1.\end{cases}$$

解此方程组得 $\begin{cases}x=2,\\ y=4,\\ z=3.\end{cases}$

答　所求的这个三位数为243.

例4　据《新华日报》消息,巴西医生马廷恩经过10年苦心研究后得出结论:卷入腐败行为的人容易得癌症、心肌梗塞、脑溢血、心脏病等.如果犯有贪污、受贿罪的580名官员与600名廉洁官员进行比较,可发现,后者的健康人数比前者的健康人数多272人,两者患病(致死)者共444人,试问犯有贪污、受贿罪的官员与廉洁官员的健康人数各占有百分之几?

解　设犯有贪污、受贿罪的官员中健康人数占 $x\%$,廉洁官员中健康人数占 $y\%$.依题设得

$$\begin{cases}600\times y\%-580\times x\%=272,\\ 600\times(1-y\%)+580(1-x\%)=444.\end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases}6y-5.8x=272,\\ 6y+5.8x=736.\end{cases}$$

解此方程组得 $\begin{cases}x=40,\\ y=84.\end{cases}$

答　贪污、受贿的官员中的健康人数仅占40%,而廉洁官员中的健康人数可占84%.

例5　某校初一有甲、乙、丙三班.甲班比乙班多4个女同学,乙

班比丙班多1个女同学.如果把甲班的第一组调到乙班,乙班的第一组调到丙班,丙班的第一组调到甲班,则三班女同学人数恰相等.已知丙班第一组中共有两个女同学,问甲、乙两班第一组各有几个女同学?

解 设甲、乙两班第一组各有 x,y 个女同学,并设丙班共有女同学 u 人,则乙班、甲班各有女同学 $u+1$ 人、$u+5$ 人,甲、乙、丙三班共有女同学$(3u+6)$人,调整后每班的女同学都是$(u+2)$人.依题意,得

$$\begin{cases} u+5-x+2=u+2, & ① \\ u-2+y=u+2. & ② \end{cases}$$

由①,②可得 $x=5,y=4$.

答 甲、乙两班第一组各有女同学5人,4人.

注 (1)本题解答中 u 是辅助元.主要用以辅助方程组解决问题.

(2)依题意,①,②外似乎还应列出方程

$$u+1-y+x=u+2, \qquad ③$$

实际上,方程③可由①、②相加得到,它不是独立于①,②外的方程,故不应列出.

例6 A、B 两汽车站,每隔相同的时间相向发出一辆车,汽车的速度相同.A、B 间有一骑自行车者,发觉每隔12分钟,后面追上来一辆汽车,每隔4分钟迎面来一辆汽车.问 A,B 两站每隔几分钟发车一次.

分析 设自行车的速度为 v_1,汽车的速度为 v_2,则后面来车与自行车是同向而行,相邻两汽车之间的距离为 $12(v_2-v_1)$;迎面来车与自行车是相向而行,相邻汽车之间的距离为 $4(v_2+v_1)$,由于发车的时间间隔相同,所以

$$12(v_2-v_1)=4(v_2+v_1),$$

即

$$v_2=2v_1. \qquad ①$$

又设车站发车的时间间隔为 t 分钟,在这个时间里汽车所走的路程

应为同向相邻两汽车之间的距离，即

$$t\quad v_2=12(v_2-v_1).\qquad ②$$

将①代入②得

$$2v_1t=12v_1.$$

所以 $t=6$(分钟).

答 A、B 两站每隔 6 分钟发车一次.

注 本题解答中 v_1,v_2 都是辅助元.

例 7 A、B、C 三人各有糖若干粒，要求互相赠送. 先由 A 给 B、C，所给的糖数等于 B、C 原来各有的糖数. 依同法再由 B 给 A、C 现有糖数，最后由 C 给 A、B 现有糖数，互送后每人恰好各有 64 粒. 问原来三人各有糖多少粒?

分析 问题中的数量关系较复杂，现列表帮助清理.

设 A、B、C 三人原有糖 x,y,z 粒. 依题意可列表如下：

	A	B	C
原　有	x	y	z
第一次赠送后	$x-y-z$	$2y$	$2z$
第二次赠送后	$2(x-y-z)$	$2y-(x-y-z)$ $-2z=-x+3y-z$	$4z$
第三次赠送后	$4(x-y-z)$	$2(-x+3y-z)$	$4z-2(x-y-z)$ $-(-x+3y-z)=-x-y+7z$

由此可得

$$\begin{cases}4(x-y-z)=64,\\2(-x+3y-z)=64,\\-x-y+7z=64.\end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases}x-y+z=16, & ①\\x-3y+z=-32, & ②\\x+y-7z=-64. & ③\end{cases}$$

①－②化简得

$$y-z=24. \tag{4}$$

③－②化简得

$$y-2z=-8. \tag{5}$$

由④.⑤解得 $z=32$，$y=56$. 将 $y=56$，$z=32$ 代入①得 $x=104$.

答　原来甲有糖 104 粒，乙有糖 56 粒，丙有糖 32 粒.

例 8　一条环行道路，周长 2 千米. 甲、乙、丙三人从同一点同时出发，每人环行两周. 现有自行车两辆，乙和丙骑自行车出发，甲步行出发，中途乙和丙步行，把自行车留给其他人骑. 已知甲步行的速度是每小时 5 千米，乙和丙步行的速度是每小时 4 千米，三人骑车的速度都是每小时 20 千米，请你设计一种走法，使三个人两辆车同时到达终点所需时间最省. 问环行两周最少要用多少分钟？

分析　要求三人两辆自行车同时到达终点且所用时间最少，必须充分利用自行车. 甲、乙、丙三人同时自 A 点沿逆时针方向环行，甲步行，而乙和丙各自骑着自行车. 乙和丙骑自行车回到 A 处，各自环行一周，又继续骑着车经过 A 处去追赶甲，如图 9－1 所示. 两辆自行车同时在 B 处追上甲，那么，乙和丙两人中必须有一人把自行车交给甲，甲接过自行车骑到 A 处，才只环行了一周，这辆自行车则又走了一周. 甲继续骑车经过 A 处追赶乙和丙. 接下来是甲、乙、丙三人骑车和步行相结合，最终是三个人两辆车同时回到 A 处，在这过程中，每辆车又行走了一圈. 所以，在全过程中，有一辆自行车行了三周. 而另一辆行了两周，共行了 5 周.

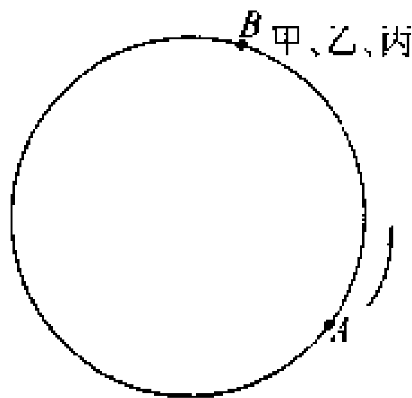


图 9－1

设甲走了了 x 千米，骑车行走了 $(2\times2-x)$ 千米，乙和丙都走了 y 千米，骑车行走了 $(2\times2-y)$ 千米. 依题意，有

$$\begin{cases} \dfrac{x}{5}+\dfrac{2\times2-x}{20}=\dfrac{y}{4}+\dfrac{2\times2-y}{20}, & ① \\ (2\times2-x)+(2\times2-y)\times2=2\times5. & ② \end{cases}$$

由①得 $x=\frac{4}{3}y$，代入②得 $y=\frac{3}{5}$，进而得 $x=\frac{4}{5}$. 因此，甲走了 $\frac{4}{5}$ 千米，乙、丙走了 $\frac{3}{5}$ 千米，而三人两辆车同时到达所需最省时间是

$$\frac{4}{5}\div\left(2\times2-\frac{4}{5}\right)\div20=\frac{8}{25}(\text{小时})=19.2(\text{分钟}).$$

答 （从略）

例 9 有甲、乙、丙三种货物，若购甲 3 件、乙 7 件、丙 1 件，共需 3.15 元；若购甲 4 件、乙 10 件、丙 1 件，共需 4.20 元. 现在购甲、乙、丙各一件共需多少元？

分析一 设甲、乙、丙每件单价分别为 x,y,z 元. 依题意，有

$$\begin{cases} 3x+7y+z=3.15, & ① \\ 4x+10y+z=4.20. & ② \end{cases}$$

要从①，②中直接求出 x,y,z 三个未知数是不可能的. 但我们的目标是求$(x+y+z)$的值. 设

$$x+y+z=m. \quad ③$$

暂时把 m 看作常数.

①－③得

$$2x+6y=3.15-m. \quad ④$$

②－③得

$$3x+9y=4.20-m. \quad ⑤$$

④×3－⑤×2 得

$$3(3.15-m)-2(4.20-m)=0.$$

解得 $m=1.05$(元).

因此，购甲、乙、丙各一件共需 1.05 元.

分析二 同分析一，得①，②. 观察①，②的系数，3×①－2×②立得

$$x+y+z=1.05(\text{元}).$$

练 习 九

1. 一张方桌由一个桌面和四条腿组成. 如果1立方米木料可制成方桌的桌面50个,或制作桌腿300条. 现有5立方米木料,请你设计一下,用多少木料做桌面,用多少木料作桌腿,恰好配成方桌多少张?

2. 甲、乙两人在一条与铁路平行的笔直的小路上,同时同地背向而行. 当一列火车开过来时,两人在行进中各自测出整列火车通过的时间分别为42秒和34秒,且在整列火车通过时两人各自走了68米和44米. 试问火车的速度?

3. 某车间共有86个工人,已知每人平均每天可加工甲种部件15个或乙种部件12个或丙种部件9个. 问应如何安排加工各种部件的人数,才能使加工后的部件按3个甲种部件、2个乙种部件和1个丙种部件一组刚好配套?

4. 用锌、铝、锡制成甲、乙、丙三种合金,其重量之比在甲中为1:3:2,在乙中为2:1:1,在丙中为1:2:5. 三种合金共用锌5.5千米、铝8千克,锡9.5千克. 问甲、乙、丙三种合金各重多少千克?

5. 三个容器都盛有水. 如果把甲容器内$\frac{1}{3}$的水倒人乙容器,再把乙容器内$\frac{1}{4}$的水倒人丙容器,最后把丙容器内$\frac{1}{10}$的水倒人甲容器,则刚好各容器内的水都是9升. 问每个容器里原有水多少升?

6. 某人乘船由A地顺流而下到B地,然后又逆流而上到C地,共乘船4小时. 已知船在静水中的速度为7.5千米/时,水流速度为2.5千米/时,A、C两地间距离为10千米,求A、B两地间距离.

7. 有甲、乙两种食盐水,含盐量之比是2:3,含水量之比是1:2,面食盐水重量之比是40:77,求甲种食盐水的浓度.

8. 在某种浓度的盐水中加人"一杯水"后,得到新盐水,它的浓度为20%,又在新盐水中加人与前述"一杯水"的重量相等的纯盐

水，盐水浓度变为 $33\frac{1}{3}\%$．问原来盐水的浓度是多少？

9．某人买13个鸡蛋、5个鸭蛋、9个鹅蛋共用12.7元；若买2个鸡蛋、4个鸭蛋、3个鹅蛋，则共用4.7元．试问：买鸡蛋、鸭蛋、鹅蛋各一个共需多少元？

10．用库存的 A、B、C 三种零件组装甲、乙、丙三种产品，每件甲需用 A、B 各2个；每件乙需用 B、C 各一个；每件丙需用2个 A 和一个 C．如组装 p 件甲产品，q 件乙产品和 r 件丙产品，则剩下2个 A 和一个 B，但 C 恰好用完．试问，能否合理安排产品甲、乙、丙的件数，使得库存的 A、B、C 三种零件都恰好用完．

第十讲　一元一次不等式
一元一次不等式组

知识点和方法述要

1. 表示不等关系的式子叫做不等式.不等式有以下三条性质:

(i)如果 $a>b$,$b>c$,那么 $a>c$.

(ii)如果 $a>b$,那么 $a+c>b+c$.

(iii)如果 $a>b$,$c>0$,那么 $ac>bc$;

如果 $a>b$,$c<0$,那么 $ac<bc$.

2. 能够使不等式成立的未知数的值叫做不等式的解.含有未知数的不等式的所有解的集合,叫做这个不等式的解集.求不等式解的过程,叫做解不等式.

如果两个不等式的解集相同,那么这两个不等式叫做同解不等式.以下是不等式的三个同解原理:

(i)不等式的两边都加上(或减去)同一个数或同一个整式,所得的不等式与原不等式是同解不等式.

(ii)不等式的两边都乘以(或除以)同一个正数,所得的不等式与原不等式是同解不等式.

(iii)不等式的两边都乘以(或除以)同一个负数,并且把不等号改变方向后,所得的不等式与原不等式是同解不等式.

3. (1)关于 x 的一元一次不等式

$$ax>b \quad (a\neq 0),$$

当 $a>0$ 时,解为 $x>\frac{b}{a}$;

当 $a<0$ 时,解为 $x<\frac{b}{a}$;

当 $a=0$ 且 $b<0$ 时解为一切实数;

当 $a=0$ 且 $b\geqslant0$ 时无解.

(2)从解题步骤来看,一元一次不等式与一元一次方程类似:(i)去分母;(ii)去括号;(iii)移项;(iv)合并同类项;(v)系数化为1.但要注意的是解不等式时,若采取步骤(i)、(v),乘数或除数是负数,则要改变不等号的方向.

(3)一元一次不等式的解可利用数轴表示.表示时要注意"两定":一是定边界点.若边界点含于解集为实心点,不含于解集为空心点;二是定方向.相对于边界而言,"小于向左,大于向右".

(4)一般地,不等式解的检验可采用以下步骤:一是改不等号为等号,检验边界点是否适合等式;二是在所求得的不等式的解集中选一个易于检验的解,看不等式是否成立.

4. 由若干个一元一次不等式组成的不等式组的解集是每个一元一次不等式解集的公共部分.此时常借助于数轴来求公共部分.

5. 根据绝对值的定义,$|x|\leqslant a$ 即 $-a\leqslant x\leqslant a$,$|x|\geqslant a$ 即 $x\geqslant a$ 或 $x\leqslant -a$.因此,解可化为一次不等式的含绝对值的不等式常通过分类脱去绝对值符号,再在相应的范围内解一元一次不等式.

例 题 精 讲

例1 解不等式

$$\frac{x-2}{3}+2(x+1)\geqslant\frac{7}{2}x-2.$$

解 原不等式可变为

$$2(x-2)+12(x+1)\geqslant21x-12,$$

化简得

$$-7x\geqslant-20.$$

所以 $x\leqslant2\frac{6}{7}$.

例2 解不等式

$$\frac{3(x-1)}{4}+\frac{2(x+2)}{3}+\frac{19}{36}\geqslant\frac{1-3x}{4}-\frac{x}{4}.$$

解 原不等式可变为

$$\frac{3x}{4}-\frac{3}{4}+\frac{2x}{3}+\frac{4}{3}+\frac{19}{36}\geqslant\frac{1}{9}-\frac{x}{3}-\frac{x}{4},$$

即
$$\frac{3x}{4}+\frac{2x}{3}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}\geqslant\frac{1}{9}+\frac{3}{4}-\frac{19}{36}-\frac{4}{3}.$$

化简得
$$2x\geqslant-1.$$

解得 $x\geqslant-\frac{1}{2}$.

例 3 解下列不等式：

(1) $\frac{x+1}{3}+1>\frac{4(x+1)}{3}-x-7$;

(2) $(2-\frac{y}{2})(y^2+1)<(1-\frac{0.1y+1}{0.2})(y^2+1)$.

解 (1)原不等式可变为

$$(x+1)+3>4(x+1)-3x-21,$$

化简得
$$0\cdot x>-1.$$

故 x 可取一切有理数.

(2)因 $y^2+1>0$,故原不等式可变为

$$2-\frac{y}{2}<1-\frac{y+10}{2},$$

化简得
$$0\cdot y<-6.$$

不等式无解.

例 4 解不等式

$$3x+2+\frac{1}{x-1}\geqslant5x+\frac{1}{x-1}-1,$$

并将解集在数轴上表示出来.

解 原不等式可变为

$$\begin{cases}x-1\neq0,\\2x\leqslant3.\end{cases}$$

所以 $x\leqslant\frac{3}{2}$ 且 $x\neq1$.

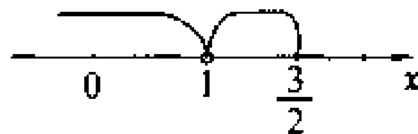


图 10－1

在数轴上表示如图 10-1.

例 5 已知不等式

$$\frac{1}{2}(x-5)-1>\frac{1}{2}(ax+2)$$

的解是 $x>\frac{1}{2}$,试求 a 的取值范围.

解 原不等式可变为

$$(1-a)x>9.$$

若 $1-a=0$,即 $a=1$ 时,不等式无解;

若 $1-a<0$,即 $a>1$ 时,不等式解为 $x<\frac{9}{1-a}$,与 $x>\frac{1}{2}$不符;

若 $1-a>0$,即 $a<1$ 时,不等式解为 $x>\frac{9}{1-a}$.依题意,有

$$\frac{9}{1-a}=\frac{1}{2}.$$

可求得 $a=-17$.

由上述知 $a=-17$ 时,原不等式的解为 $x>\frac{1}{2}$.

例 6 解不等式组

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2}-\frac{x}{3}+1>0, & ① \\ 2-\frac{5-x}{7}>1-\frac{1-x}{14}, & ② \\ 4x-3\leqslant 5+2x. & ③ \end{cases}$$

并将解集在数轴上表示出来.

解 由①可得 $3(x-1)-2x+6>0$.

解得 $x<-3$.

由②得 $28-2(5+x)>14-(1-x)$.

化简得 $-3x>-5$.

解得 $x<1\frac{2}{3}$.

由③得 $x\leqslant 4$.

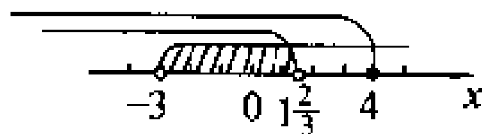


图 10-2

如图 10-2 所示.不等式组的解集为 $-3<x<1\frac{2}{3}$.

例 7 设 $a\leqslant 0$,解关于 x 的不等式组

$$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\ a<x-a\leqslant 1.\end{cases}$$

解 原不等式组可变为

$$\begin{cases}-a<x\leqslant 1-a,\\ a<x\leqslant 1+a.\end{cases}$$

因 $a\leqslant 0$,所以 $a\leqslant -a, 1+a\leqslant 1-a$.

(i)若 $-a<1+a$,即 $-\frac{1}{2}<a\leqslant 0$ 时,原不等式组的解为 $-a<x\leqslant 1+a$.

(ii)若 $-a\geqslant 1+a$,即 $a\leqslant -\frac{1}{2}$时,原不等式组无解.

例 8 解不等式

$$|x-5|-|x+2|<1.$$

分析 依据 $|x+2|$,$|x-5|$为零的情形,对 x 进行分段讨论.原不等式可化为下面三个不等式组:

$$\begin{cases}x<-2,\\ -(x-5)+(x+2)<1;\end{cases} \qquad (\text{I})$$

$$\begin{cases}-2\leqslant x<5,\\ -(x-5)-(x+2)<1;\end{cases} \qquad (\text{II})$$

$$\begin{cases}x\geqslant 5,\\ (x-5)-(x+2)<1.\end{cases} \qquad (\text{III})$$

解 当 $x<-2$ 时,原不等式化为

$$-(x-5)+(x+2)<1.$$

化简得 $0\cdot x<-6$,不等式无解.

当 $-2\leqslant x<5$ 时,原不等式化为

$$-(x-5)-(x+2)<1,$$

化简得

$$2x>2.$$

解得 $x>1$，所以不等式解集为 $1<x<5$.

当 $x\geqslant5$ 时，原不等式化为

$$(x-5)-(x+2)<1,$$

化简得 $0\cdot x<8$. 所以原不等式解集为 $x\geqslant5$.

综上所述，原不等式解集为 $x>1$.

例 9 解不等式

$$1\leqslant|3x-5|\leqslant2.$$

分析一 原不等式实际上是

$$\begin{cases}|3x-5|\geqslant1, & ①\\ |3x-5|\leqslant2. & ②\end{cases}$$

根据绝对值的定义，可化为

$$3x-5\leqslant-1,$$

或

$$3x-5\geqslant1.$$

解得 $x\leqslant1\frac{1}{3}$ 或 $x\geqslant2$.

②可化为

$$\begin{cases}3x-5\geqslant-2,\\ 3x-5\leqslant2.\end{cases}$$

解得 $1\leqslant x\leqslant2\frac{1}{3}$.

所以，原不等式的解集为 $1\leqslant x\leqslant1\frac{1}{3}$ 或 $2\leqslant x\leqslant2\frac{1}{3}$.

分析二 原不等式可化为

$$\frac{1}{3}\leqslant\left|x-\frac{5}{3}\right|\leqslant\frac{2}{3}.$$

$\left|x-\frac{5}{3}\right|$ 在数轴上表示 x 与 $\frac{5}{3}$ 间的距离，如图 10－3 所示. 不等式的解集为

$$1\leqslant x\leqslant1\frac{1}{3} \text{ 或 } 2\leqslant x\leqslant2\frac{1}{3}.$$

图 10－3

练 习 十

一、选择题

1. 若 $x+y<y$，$x-y<x$，则 x 与 y 的大小关系是　　(　　).

(A) $x>y$　　(B) $x=y$

(C) $x<y$　　(D) $x\leqslant y$

2. 如果关于 x 的方程 $\frac{2x+a}{3}=\frac{4x+b}{5}$ 的解不是负值，那么 a 与 b 的关系是　　(　　).

(A) $a>\frac{3b}{5}$　　(B) $b\geqslant\frac{5}{3}a$

(C) $5a=3b$　　(D) $5a\geqslant 3b$

3. 如果不等式组 $\begin{cases}x\geqslant m\\ x\leqslant n\end{cases}$ 无解，则不等式组 $\begin{cases}x>2-m,\\ x<2-n\end{cases}$ 的解集是　　(　　).

(A) $2-n<x<2-m$　　(B) $n-2<x<m-2$

(C) $2-m<x<2-n$　　(D) 无解

4. 已知 $(3-2m)x>2m-3$ 的解集是 $x<-1$，则 m 的取值范围是　　(　　).

(A) $m<0$　　(B) $m>\frac{3}{2}$

(C) $m<\frac{3}{2}$　　(D) $m>2$

二、填空题

5. 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases}\frac{x+4}{3}>\frac{x}{2}+1,\\ x+a<0\end{cases}$ 的解集为 $x<2$，则 a 的取值范围是______.

6. $\frac{1-\frac{t}{5}}{4}\geqslant\frac{1+\frac{t}{4}}{5}$ 的解集是______.

7. 不等式组$\begin{cases}x=4y+20,\\7y<x<8y\end{cases}$的整数解是______.

8. 若$2(x-2)-3(4x-1)=9(1-x)$，且$y<x+9$，则$\frac{y}{\pi}$与$\frac{10}{31}y$中较大的是______.

三、解答题

9. 解不等式$\frac{0.3-x}{0.2}-\frac{x-0.1}{0.5}<0.2$.

10. 解不等式组

$$\begin{cases}1<\frac{2x-5}{3}<3,\\\frac{1-x}{2}<4(2x-3)<\frac{11x}{2},\\(x+5)-\frac{2}{3}\geqslant 2x-\frac{3}{2}.\end{cases}$$

11. 解不等式组

$$\begin{cases}\frac{x}{3}-\frac{a}{2}>\frac{x+2}{6},\\2(x+1)>11-x.\end{cases}$$

12. 解不等式$\left||x+3|-|x-3|\right|>3$.

13. 已知关于x的不等式$(2a-b)x+a-5b>0$的解集为$x<\frac{10}{7}$，求关于x的不等式$ax>b$的解集.

14. 求不等式组

$$\begin{cases}3x+2y-z=4,\\2x-y+2z=6,\\x+y+z<7\end{cases}$$

的所有正整数解.

第十一讲　一元一次不等式(组)的应用

知识点和方法述要

现实世界中不等关系是普遍存在的.类似于利用一元一次方程(组)解决某些实际问题,我们也可以利用一元一次不等式(组)求出或确定一些实际问题中的某个量的变化范围.

例题精讲

例1　某市城区电影院为了吸引暑假期间的学生观众,增加票房收入,决定在六月份向城区内中、小学生预售供七、八两个月使用的"学生电影(优惠)兑换券.每张优惠券定价为1元,可随时兑换当日某一场次电影票一张.

如果七月和八月期间,每天放影5场次,电影票平均每张3元,平均每场次能卖出250张.为了保证每场次的票房收入平均不低于1000元,至少应预售这两个月的"优惠券"多少张?

解　设每一场次至少用"学生电影兑换券"x张,则每场次的票房收入平均不低于1000元需

$$3\times250+x\geq1000.$$

解得$x\geq250$,即每场次的"优惠券"的张数不少于250张.因此,每天的"优惠券"的张数不少于

$$250\times5=1250.$$

从而,七、八两个月至少需卖出"优惠券"

$$1250\times31\times2=77500.$$

答　至少应预售七、八两个月的"学生电影兑换券"77500张.

例2　把若干苹果分给几个小朋友.如果每人分4个,则剩下9

个;如果每人分6个,则最后一个小朋友分得的苹果数将少于3个.求小朋友人数和苹果的数量.

分析 设小朋友人数为 x,则苹果有 $(4x+9)$ 个.在第二次分时,有 $(x-1)$ 人分得6个苹果,即分了 $6(x-1)$ 个,剩下的苹果少于3个.因此,可列出不等式

$$0 \leqslant (4x+9)-6(x-1)<3,$$

即

$$0 \leqslant -2x+15<3.$$

解得 $6<x \leqslant 7.5$.注意到小朋友人数 x 是个整数,故 $x=7$.而苹果数为

$$4x+9=4\times 7+9=37.$$

例3 某次数学竞赛,共有16道选择题.评分办法是:答对一题给6分,答错一题倒扣2分,不答则不给分.某学生有一道题未答,那么这个学生至少答对多少道题,成绩才能在60分以上?

解 设需要答对 x 道题,成绩才能在60分以上.依题意,有

$$\begin{cases} 6x-2(15-x)>60, & ① \\ 0 \leqslant x \leqslant 15. & ② \end{cases}$$

由①可得 $x>11\frac{1}{4}$.结合②及 x 为整数,可知 $x=12,13,14,15$.

答 这个学生至少答对12道题成绩才能在60分以上.

例4 某一出租车的车费起步价5元(可行驶2千米),往后每多行1千米车费增加2元.现从甲地到乙地乘出租车共支出车费35元.如果从甲地到乙地先步行800米,然后乘车也需车费35元.求从甲、乙两地中点乘车到乙地需支付多少车费?

分析 依题意可知,2千米内车费5元,以后每多行1千米增加车费2元.计程以千米为单位(不足1千米仍计作1千米).由于后来步行0.8千米后车费不变,故甲、乙两地距离减去0.8千米后,汽车计程仍不变.

设两次汽车计程均为 $2+n$ 千米,甲、乙两地距离为 x 千米,则

$$5+2n=35, \qquad ①$$

$$2+(n-1)<x\leqslant 2+n, \qquad ②$$

$$2+(n-1)<x-0.8\leqslant 2+n. \qquad ③$$

由①得 $n=15$,代入②,③解得 $16.8<x\leqslant 17$. 于是

$$6.4<\frac{x}{2}-2\leqslant 6.5.$$

这表明汽车从甲、乙两地中点出发到乙地除开出 2 千米外还需计程 7 千米,共需支付车费

$$5+2\times 7=19(\text{元}).$$

答　从甲、乙的中点起到乙地需支付 19 元车费.

例 5　有一个四位数,它满足下述条件:

(i)个位上的数字的 2 倍与 2 的和小于十位上的数字的一半;

(ii)个位上的数字与千位上数字,十位上的数字与百位上的数字同时对调,所得的新四位数与原四位数相同;

(iii)个位数字与十位数字之和等于 10.

求这个四位数.

解　由(ii)知四位数的千位上的数字与个位上的数字相同,百位上的数字与十位上的数字相同,故可设这个四位数为 $\overline{xyyx}$,由(i),(iii)可得

$$\begin{cases} x+y=10, & ① \\ 2x+2<\dfrac{y}{2}. & ② \end{cases}$$

由①,②得

$$2x+2<\frac{1}{2}(10-x),$$

解得 $x<\dfrac{6}{5}$. 注意到 $1\leqslant x\leqslant 9$,故 $x=1$. 此时 $y=9$. 所以,所求四位数为 1991.

例 6　一木盒中装有红、白、蓝三种颜色的球,已知蓝球数至少是白球数的一半,至多是红球数的 $\dfrac{1}{3}$,且白球数与蓝球数的和至少是

55.问盒中最少有多少个红球？

解 设 x,y,z 分别表示红、白、蓝球的个数.依题意,得

$$\begin{cases} \dfrac{y}{2} \leqslant z \leqslant \dfrac{x}{3}, & ① \\ y + z \geqslant 55. & ② \end{cases}$$

由①得 $y \leqslant 2z$,代入②得

$$3z \geqslant 55,$$

解得 $z \geqslant 18\dfrac{1}{3}$.因 z 为整数,故 $z \geqslant 19$.再由①知

$$x \geqslant 3z \geqslant 57.$$

当 $z=19, y=38$ 时可取 $x=57$ 满足题目中条件.

答 盒中至少有 57 个红球.

例 7 某厂 1999 年 12 月在制订 2000 年某种化工产品的生产计划时,提供了下列数据:

(i)生产该产品的工人数不能超过 200 人;

(ii)每个工人全年工作时数约 2100 工时;

(iii)预计 2000 年该产品至少可以销售 80000 袋;

(iv)每生产一袋需要 4 工时;

(v)每袋需要原料 20 千克;

(vi)现在库存原料 800 吨,本月还需用 200 吨,2000 年可以补充 1200 吨.

试根据上述数据确定 2000 年该产品的生产计划.

解 设 2000 年可以生产该产品 x 袋.根据题意,得

$$\begin{cases} 4x \leqslant 2100 \times 200, \\ 20x \leqslant (800 - 200 + 1200) \times 1000, \\ x \geqslant 80000. \end{cases}$$

解得 $80000 \leqslant x \leqslant 90000$.

答 2000 年该产品的生产量应在 80000 袋至 90000 袋之间.

例 8 有两个学生参加四次测验,他们的平均分数不同,但都是低于 90 分的整数.他们又参加了第五次测验,测验后他们的平均成

绩都提高到90分.问在第五次测验时,这两个学生的分数各是多少?(满分为100分).

解 设其中某个学生前4次的平均成绩为 x 分,第五次的测验成绩为 y 分.依题意,有

$$\begin{cases} \dfrac{4x+y}{5}=90, & ① \\ 90<y\leqslant 100. & ② \end{cases}$$

由①得 $y=450-4x$,代入②得

$$90<450-4x\leqslant 100,$$

解得 $87.5\leqslant x<90$.因 x 为整数,故 $x=88$ 或 89.

因两个学生前四次测验平均分不同,故一个为88分,另一个为89分.再由①可知第五次测验的成绩一个为98分,另一个为94分.

例9 6个人围坐在一张圆形桌子的周围.已知他们的平均年收入为10000元,并且每个人的年收入是坐在他两旁的人的平均收入,那么坐在这张桌子边上的人中,年收入最少应是多少元?

解 设这6个人的收入依次为 $x_1,x_2\cdots,x_6$ 不妨设 $x_1\leqslant x_2$.依题意,有

$$x_2=\frac{1}{2}(x_1+x_3),$$

于是

$$x_3-x_2=x_2-x_1\geqslant 0.$$

可知 $x_3\geqslant x_2$.

同理 $x_4\geqslant x_3,x_5\geqslant x_4,x_6\geqslant x_5,x_1\geqslant x_6$.

由上述不等式可得

$$x_1\geqslant x_6\geqslant x_5\geqslant x_4\geqslant x_3\geqslant x_2\geqslant x_1.$$

即 $x_1=x_2=\cdots=x_6$

依题意,知这6个人的年收人都相同,均为10000元.故收入最少的人收人也为10000元.

练 习 十 一

1. 一人上午10时以5千米/时的速度从甲地步行到乙地，到达乙地时已超过下午1点，但还不到1点10分，求甲、乙两地的距离在什么范围之间？

2. 某班打算用10元钱班费买些笔记本和圆珠笔作奖品奖励运动员，共需12件奖品. 已知每本笔记本价格是0.94元，每支圆珠笔价格是0.76元. 问最多可买几本笔记本？

3. 甲、乙两人沿边长为60米的等边三角形 ABC 的边按 $A\to B\to C\to A$ 的方向行走，甲每分钟走65米，乙每分钟走50米. 设甲在顶点 A 时，乙在顶点 C，问：几分钟后甲、乙两人可第一次行走在同一条边上？

4. 一堆彩色球，有红、黄两种颜色. 首先数出的50个球中有49个红球，以后每数出的8个球中都有7个红球，一直数到最后8个球，正好数完. 如果已数出的球中红球不少于90%，那么这堆球的数目最多只能有多少个？

5. 货轮上卸下若干只箱子，其总重量为10吨，每只箱子的重量不超过1吨. 为了保证能把这些箱子一次运走，问至少需要多少辆载重3吨的汽车？

6. 将若干只鸡放入若干个笼. 若每个笼里放4只，则有一鸡无笼可放；若每个笼里放5只，则有一笼无鸡可放，那么至少有多少只鸡？多少个笼？

7. 三人分糖，每人都得整数块，乙比丙多得13块，甲所得是乙的2倍. 已知糖的总块数是一个小于50的质数，且它的各位数字之和为11，试求每人得糖的块数.

8. 小王有一个哥哥和一个弟弟. 哥哥的年龄是20岁，小王的年龄的2倍加上他弟弟年龄的5倍等于97. 问小王和他弟弟的年龄各是多少？

9. 一块用栅栏围成的长方形的土地大小为 24 米 × 52 米. 一位农业科技人员欲将这块土地从内部分割成一些大小相同的正方形的试验田,要求这块土地全部被划分而且分割成的正方形的边与土地的边界平行. 试问:有 1997 米栅栏,最多可将土地分成多少块正方形试验田?

10. 某地区举办初中数学联赛,有 A、B、C、D 四所中学参加,选手中,A、B 两校共 16 名;B、C 两校共 20 名;C、D 两校共 34 名,并且各校选手人数的多少是按 A、B、C、D 中学的顺序选派的,试求各中学的选手人数.

第十二讲　整式的乘法

知 识 点 和 方 法 述 要

1. 幂的三条运算法则：

(i) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$(m,n 都是正整数)；

(ii) $(a^m)^n = a^{mn}$(m,n 都是正整数)；

(iii) $(ab)^n = a^n b^n$(n 为正整数).

2. (1)单项式相乘，把它们的系数、相同字母分别相乘，对于只在一个单项式含有的字母，则连同它的指数作为积的一个因式.

(2)多项式与多项式相乘，其基本原理是运用乘法对加法的分配律转化为单项式与多项式相乘，继而转化为单项式与单项式相乘.

(3)当两多项式都按降幂并在缺项处补上0后排列，各项的位置就可以表示所含字母的次数. 因此，多项式乘以多项式时，只须写出系数，算出结果后，再把字母和相应的指数补上去. 这种方法称作分离系数法.

3. 乘法公式：

(i) 平方差公式：$(a-b)(a+b)=a^2+b^2$；

(ii) 完全平方公式：$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$；

(iii) 立方和公式：$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$；

(iv) 立方差公式：$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$；

此外，还会经常用到下面的几个乘法公式：

(v) $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$；

(vi) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$；

(vii) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$$=a^3+b^3+c^3-3abc；$$

(viii) $(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})=a^n-b^n$；

(ix) $(a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-1}b^2-\cdots-ab^{2n-1}+b^2n)$

$=a^{2n+1}+b^{2n+1}$.

4. 待定系数法是一种重要的解题方法，有着广泛的应用. 这种方法的特点是先假定一个恒等式，其中含有待定的系数，然后根据恒等式的性质列出方程组，求出各待定系数的值或从方程组中消去这些待定系数，找出原有那些已知系数间所存在的关系，从而使问题得以解决.

例 题 精 讲

例 1 计算：$(4a^3-a+8)(2a-3)$.

解一 原式 $=2a(4a^3-a+8)-3(4a^3-a+8)$

$=8a^4-2a^2+16a-12a^3+3a-24$

$=8a^4-12a^3-2a^2+19a-24$.

解二

$$\begin{array}{r} 4+0-1+8 \\ 2-3 \\ \hline 8+0-2+16 \\ -12+0+3-24 \\ \hline 8-12-2+19-24 \end{array}$$

原式 $=8a^4-12a^3-2a^2+19a-24$.

例 2 计算：$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.

解 原式 $=[(x-1)(x-4)][(x-2)(x-3)]$

$=(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)$

$=[(x^2-5x+5)-1][(x^2-5x+5)+1]$

$=(x^2-5x+5)^2-1$

$=x^4+25x^2+25-2\cdot x^2\cdot 5x+2\cdot x^2\cdot 5-2\cdot(-5x)\cdot 5-1$

$=x^4-10x^3+35x^2+50x+24$.

注 进行多项式乘法时要注意观察分析多项式的结构特点，以便作适当变形，灵活地运用法则和乘法公式.

例3 计算：$(3xy-2x^2+\frac{1}{2}y^2)(3xy+2x^2-\frac{1}{2}y^2)$.

解 原式$=[3xy-(2x^2-\frac{1}{2}y^2)][3xy+(2x^2-\frac{1}{2}y^2)]$

$$=9x^2y^2-(2x^2-\frac{1}{2}y^2)^2$$

$$=9x^2y^2-(4x^4-2x^2y^2+\frac{1}{4}y^4)$$

$$=-4x^4+11x^2y^2-\frac{1}{4}y^2.$$

例4 计算：

$(a+2b)^2(a^2-2ab+4b^2)^2-$

$(\frac{a^2}{4}+ab+4b^2)(\frac{a^2}{4}-ab+4b^2)(4a^2-4b^2)$.

解 原式$=[(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)]^2$

$$-[(\frac{a^2}{4}+ab+4b^2)(\frac{a}{2}-2b)]$$

$$\cdot[(\frac{a^2}{4}-ab+4b^2)(\frac{a}{2}+2b)]$$

$$=(a^3+8b^3)^2-(\frac{a^3}{8}-8b^3)(\frac{a^3}{8}+8b^3)$$

$$=a^6+16a^3b^3+64b^6-\frac{a^6}{64}+64b^6$$

$$=\frac{63}{64}a^6+16a^3b^3+128b^6.$$

例5 计算：

$a(b+c-a)^2+b(c+a-b)^2+c(a+b-c)^2$

$+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$.

解一 设 $b+c-a=x,c+a-b=y,a+b-c=z$，则 $a=\frac{1}{2}(y+z),b=\frac{1}{2}(z+x),c=\frac{1}{2}(x+y)$.

原式$=\frac{1}{2}[(y+z)x^2+(z+x)y^2+(x+y)z^2-2xyz]$

$= \frac{1}{2}[(y+z)x^2 + zy(y+z) + xy(y+z) + xz(y+z)]$

$= \frac{1}{2}(y+z)[x(x+y) + z(x+y)]$

$= \frac{1}{2}(y+z)(z+x)(x+y)$

$= \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2b \cdot 2c$

$= 4abc.$

解二 设 $a+b+c=2s$，则 $b+c-a=2s-2a$，$c+a-b=2s-2b$，$a+b-c=2s-2c$.

原式 $= a(2s-2a)^2 + b(2s-2b)^2$

$\quad + c(2s-2c)^2 + (2s-2a)\cdot(2s-2b)(2s-2c)$

$= 4[a(s^2-2as+a^2) + b(s^2-2bs+b^2) + c(s^2-2cs+c)]$

$\quad + 8[s^3 - (a+b+c)s^2 + (ab+bc+ca)s - abc]$

$= 8s^3 - 4(a+b+c)s^2 - 8(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)s$

$\quad + 4(a^3+b^3+c^3-2abc)$

$= 8s^3 - 8s^3 - 4(a^3+b^3+c^3-3abc) + 4(a^3+b^3+c^3-2abc)$

$= 4abc.$

例 6 计算：

(1) $2000^2 - 1999^2 + 1998^2 - 1997^2 + \cdots + 2^2 - 1^2$;

(2) $2(3+1)(3^2+1)(3^3+1)\cdots(3^{32}+1)+1$.

解 (1)原式 $= (2000^2 - 1999^2) + (1998^2 - 1997^2) + \cdots + (2^2 - 1^2)$

$= (2000-1999)(2000+1999)$

$\quad + (1998-1997)(1998+1997) + \cdots + (2-1)(2+1)$

$= 2000 + 1999 + 1998 + 1997 + \cdots + 2 + 1$

$= 2001000.$

(2)原式 $= (3-1)(3+1)(3^2+1)\cdots(3^{32}+1)+1$

$= (3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)\cdots(3^{32}+1)+1$

$= (3^4-1)(3^4+1)\cdots(3^{32}+1)+1$

$= (3^8-1)(3^8+1)(3^{16}+1)(3^{32}+1)+1$

$$=(3^{32}-1)(3^{32}+1)+1$$
$$=3^{64}-1+1$$
$$=3^{64}.$$

例 7 (1)设 a,b,c,d 都是整数，且 $m=a^2+b^2, n=c^2+d^2$，试将 mn 表示成两个整数的平方和的形式；

(2)已知 $a^2+b^2=1, x^2+y^2=1, ax+by=0$，试求 $a^2+x^2, b^2+y^2, ab+xy$ 的值.

解 (1)
$$mn=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$$
$$=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$$
$$=(a^2c^2-2abcd+b^2d^2)+(a^2d^2+2abcd+b^2c^2)$$
$$=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2.$$

因 a,b,c,d 都是整数，故 $ac-bd, ad+bc$ 都是整数，mn 表示成两整数 $ac-bd, ad+bc$ 的平方和.

(2)因 $a^2+b^2=1, x^2+y^2=1, ax+by=0$，所以
$$(a^2+x^2-1)^2+(b^2+y^2-1)^2+2(ab+xy)^2$$
$$=a^4+x^4+1+2a^2x^2-2a^2-2x^2+b^4+y^4$$
$$+1+2b^2y^2-2b^2-2y^2+2a^2b^2+2x^2y^2+4abxy$$
$$=(a^4+2a^2b^2+b^4)+(x^4+2x^2y^2+y^4)$$
$$+2(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)-2(a^2+b^2)-2(x^2+y^2)+2$$
$$=(a^2+b^2)^2+(x^2+y^2)^2+2(ax+by)^2-2-2+2$$
$$=1+1-2$$
$$=0.$$
所以 $a^2+x^2=1, b^2+y^2=1, ab+xy=0$.

注 (i) 添项或拆项配方是一常用技巧.

(ii) (1)中 mn 也可表示为 $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$.

例 8 a,b 为何值时，$4x^4-16x^3+ax^2-8x+b$ 为完全平方式？

解 设原式 $=(2x^2+cx+d)^2$
$$=4x^4+4cx^3+(c^2+4d)x^2+2cdx+d^2.$$

比较两边同次项的系数,得

$$\begin{cases}4c=-16,\\ c^2+4d=a,\\ 2cd=-8,\\ d^2=b.\end{cases}$$

由此解得 $c=-4, d=1, a=20, b=1$. 故当 $a=20, b=1$ 时,原式为完全平方式.

注 本例采用待定系数法求解.

例 9 已知 $ax+by=7, ax^2+by^2=49, ax^3+by^3=133, ax^4+by^4=406$,试求 $1995(x+y)+6xy-\frac{17}{2}(a+b)$的值.

解 因 $(ax+by)(x+y)=(ax^2+by^2)+xy(a+b)$,

$(ax^2+by^2)(x+y)=(ax^3+by^3)+xy(ax+by)$,

$(ax^3+by^3)(x+y)=(ax^4+by^4)+xy(ax^2+by^2)$,

依题设,可得

$$\begin{cases}7(x+y)=49+xy(a+b), & ①\\ 49(x+y)=133+7xy, & ②\\ 13(x+y)=406+49xy. & ③\end{cases}$$

由③得 $19(x+y)=58+7xy$. ④

②-④整理得 $x+y=\frac{5}{2}$. ⑤

⑤代入④得 $xy=-\frac{3}{2}$. ⑥

⑤,⑥代入①得 $a+b=21$. ⑦

由⑤,⑥,⑦得

$$\begin{aligned}&1995(x+y)+6xy-\frac{17}{2}(a+b)\\ &=1995\times\frac{5}{2}+6\times\left(-\frac{3}{2}\right)-\frac{17}{2}\times 21\\ &=4800.\end{aligned}$$

练 习 十 二

一、填空题

1. $25\frac{1}{3}\times25\frac{2}{3}=$________.

2. $11111\times99999=$________.

3. 已知 $x+y=3,xy=-2$,则 x^3+y^3 的值是________.

4. 已知 $a-b=-2,b-c=5$,则 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 的值为________.

5. 若 $2^8+2^{10}+2^n$ 为完全平方数,则 $n=$________.

二、解答题

6. 计算:

(1) $(x+2y-z)(x-2y+z)-(x+2y+z)^2$;

(2) $(\frac{5}{2}a^2y+\frac{2}{5}ay^2)[(\frac{5}{2}a^2y-\frac{2}{5}ay^2)^2+a^3y^3]$.

7. 解方程组

$$\begin{cases}(x+4)(y+4)=(x-3)(y-3),\\(2x+3)(3y-8)=(3x+5)(2y-7).\end{cases}$$

8. 已知 $x=2a-b-c,y=2b-c-a,z=2c-a-b$,求 $(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z$ 的值.

9. (1)计算 $(x^8-x^7y+x^5y^3-x^4y^4+x^3y^5-xy^7+y^8)(x^2+xy+y^2)$;

(2) 求 $(2x^6-3x^5+4x^4-7x^3+2x-5)(3x^5-x^3+2x^2+3x-8)$ 展开式中 x^8 的系数.

10. 计算:

(1) $\dfrac{1995}{19901995^2-19901994\times19901996}$;

(2) $\dfrac{(1999^6+1999^5+1999^4+1999^3+1999^2+2000)\times1998+1}{1999^7}$.

11. 计算：$(b+c-2a)^3+(c+a-2b)^3+(a+b-2c)^3-3(b+c-2a)(c+a-2b)(a+b-2c)$.

12. 设 a,b,c 都是正数．当 p,q,r 满足何种关系时，等式

$$(a+b+c)(ap^2+bq^2+cr^2)=(ap+bq+cr)^2$$

恒成立？

第十三讲 整式的除法

知识点和方法述要

1. (1)规定：$a^0=1(a\neq0)$；$a^{-p}=\frac{1}{a^p}$（p 为正整数，$a\neq0$）.

(2)同底幂的除法：

$$a^m\div a^n=\begin{cases}a^{m-n} & (m>n);\\ 1 & (m=n);\\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n).\end{cases}$$

其中 $a\neq0,m,n$ 均为正整数.

2. (1)单项式相除，把系数、同底数幂分别相除，作为商的因式，对于只在被除式里含有的字母，则连同它的指数作为商的一个因式.

(2)多项式除以单项式，先把多项式的每一项除以这个单项式，再把所得的商相加.

(3)多项式除以多项式可以用竖式进行，方法与多位数除以多位数的演算方法类似．一般先将被除式、除式都按降幂排列．如果遇到被除式、除式中缺项用 0 补位或空出．多项式的除法也可采用分离系数法.

如果用 $f(x)$ 表示被除式，$g(x)$ 表示除式，$g(x)$ 表示商式，$r(x)$ 表示余式，$r(x)$ 的次数低于 $g(x)$ 的次数，那么

$$f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x).$$

若 $r(x)=0$，则 $f(x)=g(x)\cdot q(x)$，称 $f(x)$ 可被 $g(x)$ 整除.

例题精讲

例 1 计算：

(1) $(-8a^3b^2)^2(-4a^2b^3)^3 \div (-16a^3b^4 \cdot a^4b^5)$.

(2) $(xyz)^{m+n+p} \div (-\frac{2}{3}x^my^nz^p \cdot x^ny^pz^m)$.

解 (1) 原式 $= 8^2a^6b^4 \cdot (-4)^3a^6b^9 \div (-16a^7b^9)$

$= [8^2 \times (-4)^3 \div (-16)]a^{6+6-7}b^{4+9-9}$

$= 256a^5b^4$.

(2) 原式 $= x^{m+n+p}y^{m+n+p}z^{m+n+p} \div (-\frac{2}{3}x^{m+n}y^{n+p}z^{p+m})$

$= -\frac{3}{2}x^py^mz^n$.

例2 计算：

$$(8x^5 - 4x^4 + 6x^2 - x + 2) \div (2x^2 + x - 3).$$

解一

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x^3 - 4x^2 + 8x - 7 \\
\hline
2x^2 + x - 3 & 8x^5 - 4x^4 \qquad\qquad + 6x^2 - x + 2 \\
 & \underline{8x^5 + 4x^4 - 12x^3} \\
 & -8x^4 + 12x^3 + 6x^2 \\
 & \underline{-8x^4 - 4x^3 + 12x^2} \\
 & +16x^3 - 6x^2 - x \\
 & \underline{16x^3 + 8x^2 - 24x} \\
 & -14x^2 + 23x + 2 \\
 & \underline{14x^2 - 7x + 21} \\
 & 30x - 19
\end{array}
$$

故所得商为 $4x^3 - 4x^2 + 8x - 7$，余式为 $30x - 19$.

解二

```
                 4 - 4 + 8 - 7
              ________________
2 + 1 - 3 )    8 - 4 + 0 - 6 - 1 + 2
               8 + 4 - 12
             ___________________
                 - 8 + 12 + 6
                 - 8 - 4 + 12
              ___________________
                      16 - 6 - 1
                      16 + 8 - 24
                    _______________
                         - 14 + 23 + 2
                         - 14 - 7 + 21
                       _________________
                                30 - 19
```

所以,有

$$(8x^5 - 4x^4 + 6x^2 - x + 2) \div (2x^2 + x - 3)$$
$$= 4x^3 - 4x^2 + 8x - 7 \cdots\cdots \text{余 } 30x - 19.$$

例 3 一个多项式除以 $x^2 - 3x + 5$,得商式为 $2x - 3$,余式为 $5x + 1$,求这个多项式.

解 设这个多项式为 $f(x)$,则

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 3x + 5)(2x - 3) + 5x + 1 \\ &= 2x^3 - 9x^2 + 19x - 15 + 5x + 1 \\ &= 2x^3 - 9x^2 + 24x - 14. \end{aligned}$$

例 4 试求 $x^{24} - x^{20} + 4x^{16} - 7x^{12} + x^8 + 2x^4 - x$ 被 $x - 1$ 除所得的余数.

分析一 由于 x^{24}的次数较高,采取通常的竖式除法比较麻烦,注意到

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1),$$

因此,作以下变形:

$$\begin{aligned} & x^{24} - x^{20} + 4x^{16} - 7x^{12} + x^8 - 2x^4 + x \\ =& (x^{24} - 1) - (x^{20} - 1) + 4(x^{16} - 1) - 7(x^{12} - 1) + (x^8 - 1) - \\ & 2(x^4 - 1) + (x - 1) - 3 \end{aligned}$$

即知 -3 为所求余数.

分析二　记 $f(x)=x^{24}-x^{20}+4x^{16}-7x^{12}+x^8-2x^4+x$，

设
$$f(x)=(x-1)q(x)+r. \quad ①$$
这里 r 为 $f(x)$ 除以 $(x-1)$ 所得余数，当 $x=1$ 时，$f(x)$ 为
$$1^{24}-1^{20}+4\times1^{16}-7\times1^{12}+1^8-2\times1^4+1=-3,$$
由①知 $r=-3$.

例 5　求 $(x^2+5x+2)^3$ 除以 x^2+2x+3 所得的余式.

分析　直接把 $(x^2+5x+2)^3$ 展开再除以 x^2+2x+3 是一种方法，由于目标是求余式，故可更辟蹊径. 先作变形：
$$x^2+5x+2=(x^2+2x+3)+3x-1,$$
记 $m=x^2+2x+3$，则
$$\begin{aligned}(x^2+5x+2)^3&=[m+(3x-1)]^3\\&=m^3+3m^2(3x-1)+3m(3x-1)^2+(3x-1)^3.\end{aligned}$$
又
$$\begin{aligned}(3x-1)^3&=27x^3-27x^2+9x-1\\&=(x^2+2x+3)(27x-81)+90x+242,\end{aligned}$$
所以，所求余式为 $90x+242$.

例 6　已知关于 x 的多项式被 $x+2$ 除的余数为 2，而被 $3x-2$ 整除，求这个多项式被 $(3x-2)(x+2)$ 除的余式.

解　记题设中的多项式为 $f(x)$，且设 $f(x)$ 除以 $(3x-2)(x+2)$ 的商式为 $q(x)$，余式为 $ax+b$，则
$$\begin{aligned}f(x)&=(3x-2)(x+2)q(x)+ax+b\\&=(3x-2)(x+2)q(x)+\frac{a}{3}(3x-2)+\frac{2}{3}a+b.\end{aligned}$$
因 $f(x)$ 可被 $3x-2$ 整除，故
$$\frac{2}{3}a+b=0 \quad ①$$
又
$$f(x)=(3x-2)(x+2)q(x)+a(x+2)-2a+b$$
被 $x+2$ 除余数为 2，故
$$-2a+b=2. \quad ②$$

由①，②得 $a=-\frac{3}{4}$，$b=\frac{1}{2}$.

所求余式为$-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$.

例7 当 p,m 为何值时,多项式 x^3+px-2 能被 x^2+mx-1 整除?

解 设
$$x^3+px-2=(x^2+mx-1)(x+a),$$
即
$$x^3+px-2=x^3+(a+m)x^2+(am-1)x-a. \quad ①$$
比较①两边同次项系数,得
$$\begin{cases} a=2, \\ am-1=p, \\ a+m=0. \end{cases}$$
解得 $m=-2,p=-5$.

故当 $m=-2,p=-5$ 时,x^3+px-2 能被 x^2+mx-1 整除.

练 习 十 三

一、填空题

1. 当 n 为奇数时,$\frac{2^n\cdot7^n\cdot3^n}{(-42)^n}=$________.

2. 若 $a^m=5,a^n=4$,则 $a^{3m-2n}=$________.

3. $15a^{m+1}b^{n+2}c^4\div(-3a^mb^{n+2}c)=$________.(写出最简结果)

4. $(\frac{7}{8})^2\div(\frac{8}{7})^{-2}-(1\frac{1}{8}-2)^0-(-\frac{1}{5})^{-3}=$________.

5. 若 $2m^2=3m+1$,那么 $8m^4-24m^3+20m^2-3m$ 的值等于________.

二、选择题

6. 已知 $P=\frac{99^9}{9^{99}},Q=\frac{11^9}{9^{90}}$,那么 P,Q 的大小关系是 ( ).

(A)$P>Q$ (B)$P=Q$

(C)$P<Q$ (D)无法确定

7. 若 x^3-2x^2+px+q 除以$(x-2)(x+2)$所得的余式为 $2x+$

l,则 (　　).

(A) $p=2, q=9$　　(B) $p=-2, q=9$

(C) $p=2, q=-9$　　(D) $p=-2, q=-9$

8. 若 $x+\frac{1}{x}=3$,则 $(x^3+\frac{1}{x^3}+7)\div(x^4+\frac{1}{x^4}+3)$ 的值为 (　　).

(A) $\frac{18}{47}$　　(B) $\frac{1}{2}$　　(C) $\frac{3}{8}$　　(D) $1\frac{2}{3}$.

三、解答题

9. 设 $f(x)=x^3-3x^2-x-1$, $g(x)=3x^2-2x+1$,求 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 所得的商式与余式.

10. 设 $(y-z)^2+(x-y)^2+(z-x)^2=(y+z-2x)^2+(x+z-2y)^2+(x+y-2z)^2$,求 $\frac{(xy+1)(yz+1)(zx+1)}{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}$ 的值.

11. 已知多项式 x^3+ax^2+bx+c 可被 $x-1$, $x+1$ 整除,且被 $x-2$ 除时余数为 3,求 a,b,c.

12. 当 a,b,c 为何值时,多项式 ax^3-9x^2+bx+c 可被 x^2+x 整除,且被 $2x+1$ 与 $x-2$ 除时余数相等.

第十四讲　线段与角

知识点和方法述要

1. 过两点有且只有一条直线.直线上一点和它一旁的部分叫做射线,这点叫做射线的端点.线段是直线上两个点和它们之间的部分,这两个点叫做线段的端点,把线段分成相等两部分的点称为线段的中点.

两点间线段最短,连接两点的线段的长度叫做这两点的距离.

2.(1)有公共端点的两条射线组成的图形叫做角.角也可以看成是一条射线绕着端点从一个位置转到另一个位置所成的图形.一射线绕着端点旋转,当终止位置和起始位置成一直线时所成的角叫作平角,继续旋转,回到起始位置时所成的角叫做周角.

一般地,本书所说的角,都指小于平角的角.

(2)(i) 平角的一半叫做直角.

$$1\text{周角}=2\text{平角}=4\text{直角}=360^\circ$$

(ii) 小于直角的角叫做锐角.大于直角而小于平角的角叫做钝角.

(iii) $1^\circ=60'$, $1'=60''$.

(3) 一条射线把一个角分成两个相等的角,这条射线叫做这个角的平分线.

(4) 如果两个角的和是一个平角,这两个角叫做互为补角.如果两个角的和是一个直角,这两个角叫做互为余角.

同角或等角的补角相等;

同角或等角的余角相等.

例题精讲

例 1 如图 14-1,已知 $AB:BC:CD=2:3:4$,E、F 分别是 AB 和 CD 的中点,且 $EF=12\text{cm}$,求 AD 的长.

解 设 $AB=2x$,则 $BC=3x$,$CD=4x$.因 E、F 分别为 AB、CD 的中点,故 $EB=x$,$CF=2x$.依题设,有

A E B C F D

图 14-1

$$EF=EB+BC+CF=12,$$

即
$$x+3x+2x=12.$$

解得 $x=2$.所以

$$AD=AB+BC+CD=9x=18(\text{cm}).$$

即为所求.

例 2 如图 14-2,M 是线段 AB 的中点,P 是线段 MB 上一点(不同于 A、B),求 $\dfrac{PA^2-PB^2}{AB\cdot PM}$ 的值.

A M P B

图 14-2

解 PA^2-PB^2

$=(PA+PB)(PA-PB)$

$=AB[(PM+AM)-(BM-PM)]$

$=2AB\cdot PM$,

故 $\dfrac{PA^2-PB^2}{AB\cdot PM}=2$.

例 3 一条线段所在直线上的一点叫做线段的分点,如果这一点在线段上,我们称这一点为线段的内分点;如果这一点在线段的延长线上,我们称这一点为线段的外分点.

如图 14-3,$AB=1$,点 P、Q 分别为线段 AB 的内分点和外分点,且 $\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{AQ}{QB}=\lambda$,求 PQ 的长.

A P B Q

图 14-3

解 设 $PB=x$，则 $AP=\lambda x$，依题设

$$x+\lambda x=1,$$

所以 $x=\frac{1}{1+\lambda}$，又设 $QB=y$，有 $AQ=\lambda y$，依题设

$$\lambda y-y=1,$$

得 $y=\frac{1}{\lambda-1}$. 于是

$$PQ=x+y=\frac{1}{1+\lambda}+\frac{1}{\lambda-1}=\frac{2\lambda}{\lambda^2-1}.$$

例 4 将长为 10cm 的一条线段用任意方式分成 5 小段，以这 5 小段为边可以围成一个五边形. 求其中最长的一段的取值范围.

解 如图 14－4，设 AB 为最长边，其余四边可视作 A、B 为端点的 AE、ED、DC、CB 首尾相接的折线段，有

$$AB<AE+ED+DC+CB.$$

即 $$AB<10-AB.$$

所以 $AB<5$(cm). 最长的一段 AB 的长度不少于 2cm 而小于 5cm.

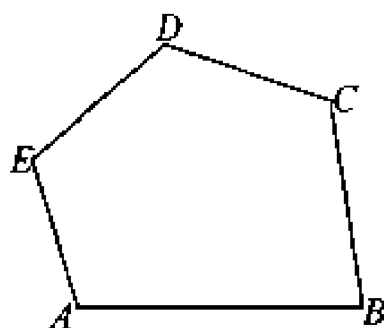


图 14－4

例 5 如图 14－5，$\angle AOB=90°$，$\angle AOC$ 是一个钝角，ON 是 $\angle AOC$ 的平分线，OM 是 $\angle BOC$ 的平分线，求 $\angle MON$ 的大小.

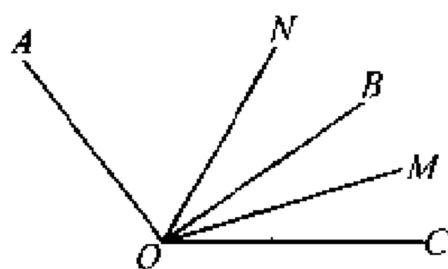


图 14－5

解 依题设，$\angle NOC=\frac{1}{2}\angle AOC$，$\angle MOC=\frac{1}{2}\angle BOC$，所以

$$\begin{aligned}\angle MON&=\angle NOC-\angle MOC\\&=\frac{1}{2}\angle AOC-\frac{1}{2}\angle BOC\\&=\frac{1}{2}(\angle AOC-\angle BOC)\\&=\frac{1}{2}\angle AOB\end{aligned}$$

$$=45°.$$

例 6 若一个角的余角与这个角的补角之比为 2:7，求这个角的补角.

解 设该角为 α，则这个角的余角为 $90° - \alpha$，补角为 $180° - \alpha$，依题设，有

$$(90° - \alpha):(180° - \alpha) = 2:7,$$

即 $$7(90° - \alpha) = 2(180° - \alpha).$$

解得 $\alpha = 54°$. 从而，可知该角的补角为

$$180° - 54° = 126°.$$

例 7 在 4 点与 5 点之间（不包括 4 点），时针与分针在何时

(1) 成 120°?

(2) 成 90°?

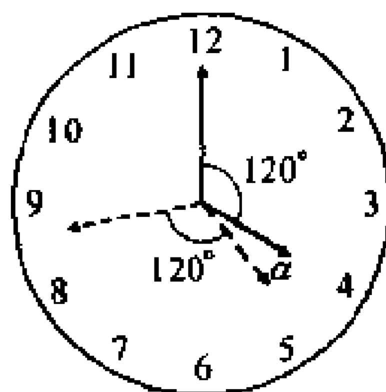


图 14 - 6

分析 (1) 在 4 点整时，时针与分针恰成 120°，但此时不计在内. 从 4 点开始，分针与时针之间的角度逐渐减少，直至两针重合（夹角为 0°）. 之后，分针"超过"时针，两针之间的夹角又逐渐增大（此时，分针在时针的前面），直到两针夹角又一次成为 120°，这个时间正是我们所要求的（如图 14 - 6）.

设时针顺时针转过 α 角后，时针与分针（分针在时针前）成 120°，则

$$12\alpha = 120° + \alpha + 120°.$$

所以 $$\alpha = \frac{240°}{11} = 21\frac{9°}{11}.$$

由于时针每转过 30°（如从指向数字 4 转到指向数字 5）相当于 1 小时（60 分钟），所以时针每转过 1°相当于经过 2 分钟，$21\frac{9°}{11}$ 相当于经过了

$$21\frac{19}{11} \times 2 = 42\frac{18}{11} = 43\frac{7}{11}\text{(分钟)}.$$

因此,在4点$43\frac{7}{11}$分时,时针与分针成120°角.

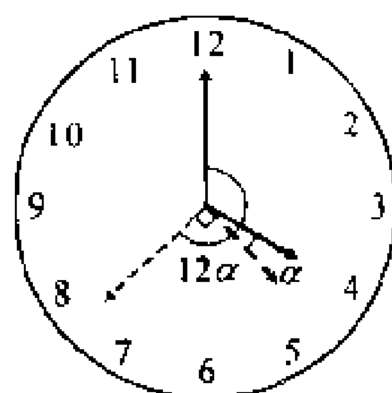


图 14-7(1)

(2) 由于在整4点时,时针与分针夹角为120°,因此,在4点与5点之间,时针与分针成90°有两种情况:

(i) 时针在分针之前(如图14-7(1)).设时针转了α角,分针转了12α角,有

$$120° + \alpha = 90° + 12\alpha,$$

可得 $$11\alpha = 30°,$$

所以 $$\alpha = \frac{30°}{11}.$$

用时 $$\frac{30}{11}\times 2 = \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11}(\text{分钟}).$$

(ii) 时针在分针之后(如图14-7(2)),此时,有

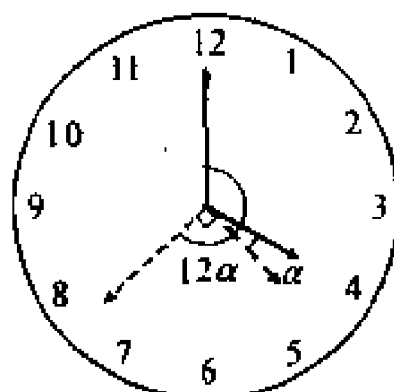


图 14-7(2)

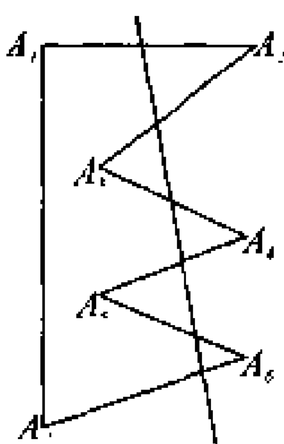
$$12\alpha - \alpha = 120° + 90°,$$

可得 $$11\alpha = 210°,$$

所以 $$\alpha = \frac{210°}{11}.$$

用时 $$\frac{210}{11}\times 2 = \frac{420}{11} = 38\frac{2}{11}(\text{分钟}).$$

综上所述,在4点到5点之间,在4点$5\frac{5}{11}$分与4点$38\frac{2}{11}$分两个时间时,时针与分针成90°.


图 14-8

例8 由若干条线段首尾相连组成的图形,我们称为折线.若折线的始端与末端重合,称之为闭折线.若有一条由7条线段组成的闭折线$A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_1$,你能找到一条与它的每一条线段都相交的直线吗?

解 如图14-8,如果直线l与闭折线中六条连续线段A_1A_2、

A_2A_3、A_3A_4、A_4A_5、A_5A_6、A_6A_7 都相交，则 A_1、A_3，A_5、A_7 应在直线 l 同侧，线段 A_1A_7 与 l 没有交点．故不存在一条直线与这闭折线的每条线段都相交．

练 习 十 四

一、选择题

1．线段 $AB=12\text{cm}$，点 C 在线段 AB 上，且 $AC=\frac{1}{3}BC$，M 为 BC 的中点，则 AM 的长为　　（　　）．

(A)4.5cm　　(B)6.5cm　　(C)7.5cm　　(D)8cm

2．已知 α，β 互为补角，且 β 的一半比 α 小30°，则 α，β 的度数分别是　　（　　）．

(A)60°，120°　(B)40°，140°　(C)80°，100°　(D)30°，150°

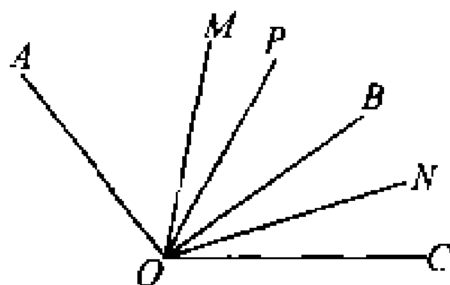
3．如图，OM、ON、OP 分别是 $\angle AOB$，$\angle BOC$，$\angle AOC$ 的平分线，则下列各式中成立的是　　（　　）．

(A)$\angle AOP<\angle MON$

(B)$\angle AOP=\angle MON$

(C)$\angle AOP<\angle MON$

(D)以上情况都不可能



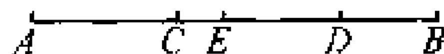
（第 3 题）

4．α、β 都是钝角，甲、乙、丙、丁计算 $\frac{1}{6}(\alpha+\beta)$ 的结果依次为50°，26°，72°，90°，其中有正确的结果，那么结果正确的是　（　　）．

(A)甲　　(B)乙　　(C)丙　　(D)丁

5．如图，$AC=\frac{1}{3}AB$，且 $AE=CD$，则 CE 为 AB 长的　　（　　）．

(A)$\frac{1}{6}$　　(B)$\frac{1}{8}$



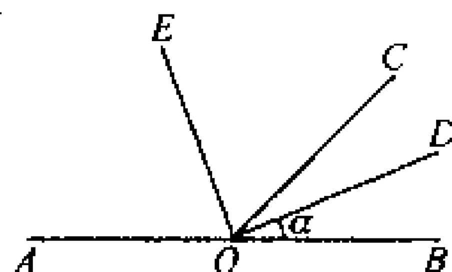
（第 5 题）

(C)$\frac{1}{12}$　　(D)$\frac{1}{16}$

6. 如图，$\angle AOB = 180°$. OD 是 $\angle COB$ 的平分线，OE 是 $\angle AOC$ 的平分线. 设 $\angle BOD = \alpha$，则与 α 的余角相等的角是　　(　　).

(A)$\angle COD$　　(B)$\angle COE$

(C)$\angle DOC$　　(D)$\angle COA$



(第 6 题)

二、解答题

7. 若 $\angle AOB = 170°$，$\angle AOC = 70°$，$\angle BOD = 60°$，求 $\angle COD$ 的大小.

8. 已知 P 是线段 AB 的中点，Q 是 PB 上任意一点，那么线段 PQ、AQ、BQ 间是否总存在关系 $2PQ = AQ - BQ$ 呢？试说明理由.

9. 试求：在时针 8 点与 9 点之间，分针与时针重合的时刻.

10. A、B、C、D 为一直线上的顺次四点，试问下式

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$$

是否成立？请说明理由.

11. 在直线 EF 上已知四个不同的点依次是 A、B、C、D，试在直线 EF 上找一点 P，使 $PA + PB + PC + PD$ 最小.

12. 已知以 O 为圆心的圆内有不同于 0 的 12 个点 $P_1, P_2, \cdots, P_{12}$. 这 12 个点没有二点位于同一条半径上. 试问在以射线 OP_1, $OP_2, \cdots, OP_{12}$ 为边的角中是否一定存在不大于 30°的角？为什么？

第十五讲　相交线和平行线

知识点和方法述要

1. (1)(i) 判断一件事情的句子叫做命题. 每个命题都是由题设、结论两部分组成. 命题常写成“如果……, 那么……”的形式, 具有这种形式的命题中, 用“如果”开始的部分是题设, 用“那么”开始的部分是结论.

(ii) 题设成立导致结论一定成立的命题叫做真命题, 否则题设成立而结论不成立, 这样的命题叫做假命题.

(2)(i) 人们在长期的实践中总结出来的, 并作为判定其他命题真假的根据, 这样的真命题称为公理.

(ii) 由题设(已知)出发, 经过一步步推理, 最后推出结论(求证)正确的过程叫做证明.

其正确性经过证明的真命题叫做定理.

(iii) 判断一个命题是假命题, 只要举出一个反例.

2. (1) 两条不同直线如果有一个公共点, 我们就说它们相交, 它们是相交直线, 这个公共点叫做它们的交点.

(2)(i) 两直线相交得到四个角, 其中仅有一个公共顶点, 而没有公共边的两个角称为对顶角, 有一公共边的两个角称为邻补角. 邻补角是有特殊位置关系的两个互补的角.

(ii) 对顶角相等.

3. (i) 当两条直线相交所成的四个角中, 有一个角是直角时, 就说两条直线互相垂直, 其中的一条直线叫做另一条直线的垂线, 它们的交点叫做垂足.

(ii) 过一点有且只有一条直线与已知直线垂直.

(iii) 设点 P 是直线 l 外一点, $PO \perp l$, 垂足 O, 线段 PO 叫做点 P

到直线 l 的垂线段.

从直线外一点到这条直线的垂线段的长度叫做点到直线的距离.

(iv) 如图 15 - 1,直线 AB、CD 被第三条直线 EF 所截,构成 8 个角,分别位于直线 AB、CD 的上方,EF 的同侧或分别位于直线 AB,CD 的下方、EF 的同侧的两个角称为同位角,如∠1 与∠5. 位于直线 AB、CD 之间,且在直线 EF 的两侧的两个角称为内错角. 位于直线 AB、CD 之间,且在直线 EF 的同旁的两个角称为同旁内角.

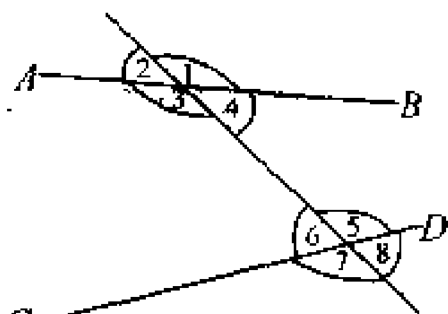


图 15 - 1

4. (1) 在同一个平面内,不相交的两条直线叫做平行线.

(2) 平行公理　经过直线外一点,有且只有一条直线与这条直线平行.

推论　如果两条直线都和第三条直线平行,那么这两条直线互相平行.

我们有时也说两条射线或线段平行,实际上是指它们所在的直线平行.

(3) 公理　同位角相等,两直线平行.

定理 1　内错角相等,两直线平行.

定理 2　同旁内角互补,两直线平行.

(4) 两直线平行

(i) 同位角相等;

(ii) 内错角相等;

(iii) 同旁内角互补.

5. 如果一个角的两边分别与另一个角的两边互相平行,则这两个角相等或互补. 其中当组成这两个角的两条射线的方向对应相同或者相反时,这两个角相等;当组成 两个角的两条射线的方向一条相同而另一条相反时,这两个角互补(如图 15 - 2).



图 15-2

6. 三角形的内角和等 180°.

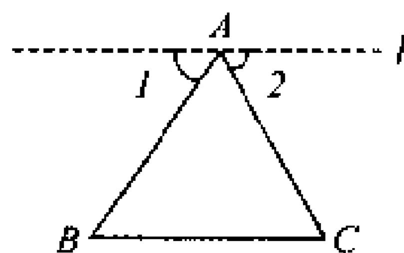


图 15-3

已知:$\triangle ABC$.(如图 15-3)

求证:$\angle A+\angle B+\angle C=180°$.

证明 过 A 作直线 l 平行 BC,有 $\angle B=\angle 1$, $\angle C=\angle 2$. 因

$$\angle 1+\angle A+\angle 2=180°,$$

所以

$$\angle A+\angle B+\angle C=180°.$$

这里注意到平角为 180°,且利用平行线的性质将分散的三角形的三个内角集中起来使问题得以解决.利用平行线移动角是常用的一种手段.

推论 (1) 由三角形的一条边及另一条边的延长线所成的角称为该三角形的一个外角.三角形的外角等于此三角形中与它不相邻的两个内角和.

(2) (i) 顶点都位于各边所在直线同侧的多边形称为凸多边形,以后不作将殊说明,多边形均指凸多边形.

(ii) n 边形的内角和等于 $(n-2)\times 180°$. 事实上,如图 15-4 所示,以 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的某一个顶点(如 A_1)为共同顶点,将这个 n 边形"分割"成 $n-2$ 个三角形 $\triangle A_1A_2A_3$, $\triangle A_1A_3A_4$, $\cdots$, $\triangle A_1A_{n-1}A_n$. 由于每一个三角形的内角和等于 180°,所以这 $n-2$ 个三角形的内角和为 $(n-2)\times 180°$,即为 n 边形的内角和.

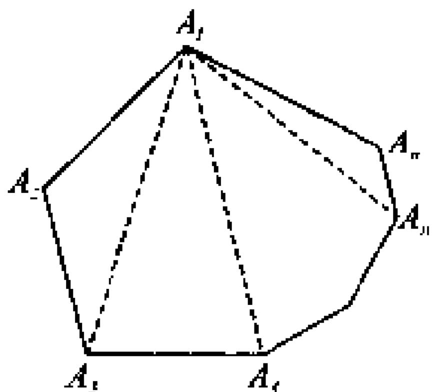


图 15-4

例 题 精 讲

例 1 如图 15 - 5，已知$\angle BAE+\angle AEC+\angle ECD=360^{\circ}$，求证：$AB\parallel CD$.

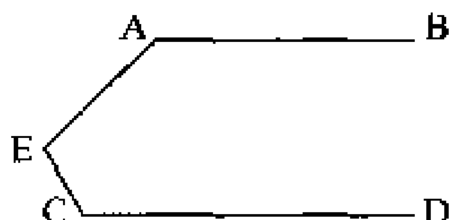


图 15 - 5

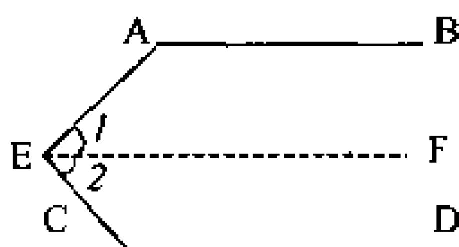


图 15 - 6

证一 过 E 作$EF\parallel AB$(如图 15 - 6)，则

$$\angle BAE+\angle 1=180^{\circ},$$

又 $$\angle BAE+\angle 1+\angle 2+\angle ECD=360^{\circ},$$

所以 $$\angle 2+\angle ECD=180^{\circ}.$$

从而可知 $CD\parallel EF$.进而得 $AB\parallel CD$.

证二 延长 AE、CD 交于 G(如图 15 - 7).因$\angle ECD=\angle EGC+\angle GEC$，$\angle GEC+\angle AEC=180^{\circ}$，且依题设，有

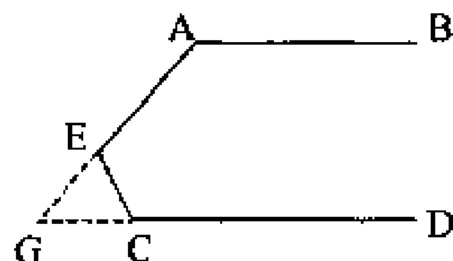


图 15 - 7

$$\angle BAG+\angle AEC+\angle ECD=360^{\circ},$$

所以 $$\angle BAG+\angle AGC=180^{\circ}$$

由此可知 $AB\parallel CD$.

例 2 已知线段 AB、CD，$AB\parallel CD$，P 位于直线 AB、CD 同侧，求证：$|\angle ABP-\angle CDP|=\angle BPD$.

证明 若 P 和 AB 位于 CD 同侧，可分三种情形：

(i) 如图 15 - 8(1)，PB 延长线交 CD 延长线于 M.因 $AB\parallel CD$，所以$\angle ABP=\angle CMP$.又$\angle BPD=\angle PDC-\angle CMP$，所以$\angle BPD=\angle CDP-\angle ABP$.

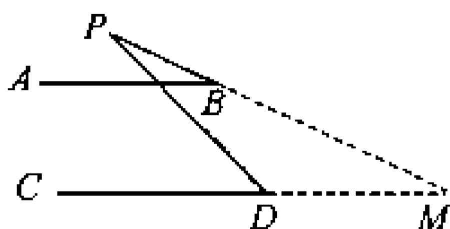


图 15－8(1)

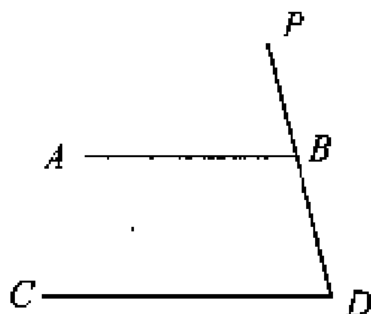


图 15－8(2)

(ii) 如图 15－8(2)，P、B、D 三点共线，命题显然成立.

(iii) 如图 15－8(3)，PB 的延长线交 DC 或其延长线于 M，因 $AB /\!/ CD$，所以 $\angle ABP=\angle CMP$. 又 $\angle CMP=\angle MPD+\angle PDM$，所以 $\angle BPD=\angle ABP-\angle CDP$.

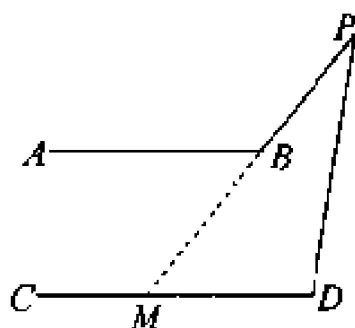


图 15－8(3)

若 P 和 CD 位于 AB 同侧，同法可证.

注 过 P 作 $PQ /\!/ AB$，再利用平行线性质，也可获证.

例 3 如图 15－9 所示，$\angle 1=\angle 2$，$\angle D=90°$，$EF\perp CD$，求证：$\angle 3=\angle B$.

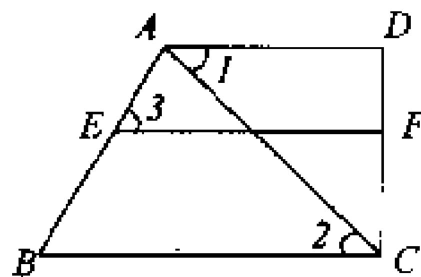


图 15－9

分析 欲证 $\angle 3=\angle B$，只需证 $EF /\!/ BC$. 因 $\angle 1=\angle 2$，有 $BC /\!/ AD$，故只需证 $EF /\!/ AD$. 这一点不难办到.

证明 因 $EF\perp CD$，故 $\angle EFD=90°$，所以 $EF /\!/ AD$. 因 $\angle 1=\angle 2$，所以 $BC /\!/ AD$. 于是 $EF /\!/ BC$，$\angle 3=\angle B$.

例 4 如图 15－10，已知 $AF /\!/ CD$，$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$，求证：$BC /\!/ EF$.

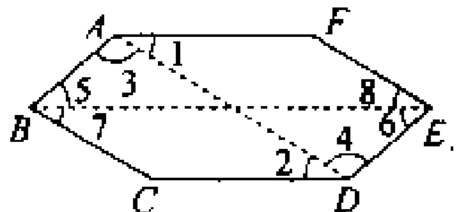


图 15－10

证一 连接 AD、BE，因 $AF /\!/ CD$，故 $\angle 1=\angle 2$. 又因 $\angle BAF=\angle CDE$，所以 $\angle 3=\angle 4$，$AB /\!/ DE$. 进而有 $\angle 5=\angle 6$. 又 $\angle ABC=\angle FED$，所以 $\angle 7=\angle 8$，可知 $BC /\!/ EF$.

证二 如图 15－11，延长 BA、EF 交于 P，延长 AF、DE 交于 Q，

因 $AF // CD$,故

$$\angle D + \angle Q = 180°.$$

又 $\angle BAF = \angle D$,

所以 $\angle BAF + \angle Q = 180°$.

可得 $AB // DE$.进而

$$\angle P + \angle PED = 180°.$$

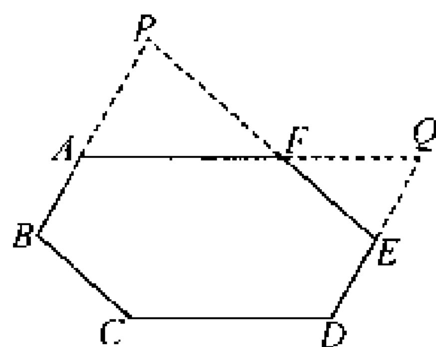


图 15-11

又$\angle B = \angle PED$,所以

$$\angle P + \angle B = 180°.$$

可得 $BC // EF$.

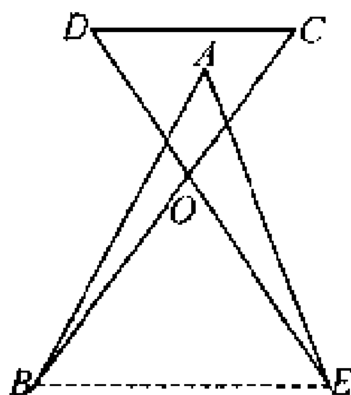


图 15-12

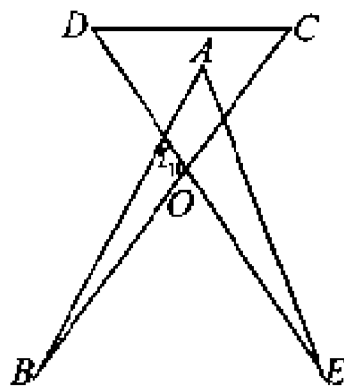


图 15-13

例 5 如图 15-12 所示,求$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E$ 的大小.

解一 连接 BE,则

$$\angle C + \angle D + \angle COD = 180°,$$

$$\angle A + \angle ABE + \angle AEB = 180°,$$

又 $\angle ABE = \angle ABO + \angle OBE$,

$$\angle AEB = \angle AEO + \angle OEB,$$

所以

$$\angle A + \angle ABO + \angle C + \angle D + \angle AEO + \angle COD + \angle OBE + \angle OEB = 360°.$$

因 $\angle COD + \angle OBE + \angle OEB = 180°$,

所以 $\angle A + \angle ABO + \angle C + \angle D + \angle AEO = 180°$.

命题获证.

解二 如图 15－13，因

$$\angle 1=\angle C+\angle D,$$
$$\angle 2=\angle A+\angle E,$$

又 $$\angle 1+\angle 2+\angle B=180°,$$

所以，有

$$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=180°.$$

例 6 如图 15－14，$\angle ABC$ 的平分线交 $\angle ACE$ 的平分线于 D，且 $\angle D=30°$. 求 $\angle A$ 的度数.

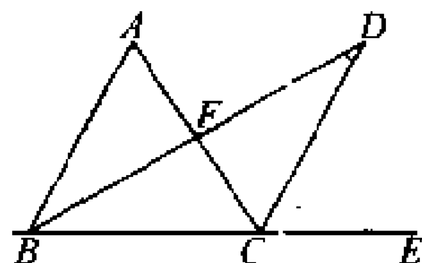


图 15－14

解 因 BD、CD 分别平分 $\angle ABE$、$\angle ACE$，故 $\angle DBC=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle ACD=\frac{1}{2}\angle ACE=\frac{1}{2}(180°-\angle ACB)$. 因

$$\angle DBC+\angle DCB+\angle D=180°,$$

所以 $\frac{1}{2}\angle ABC+\angle ACB+\frac{1}{2}(180°-\angle ACB)+30°=180°.$

可得 $\angle ABC+\angle ACB=120°.$

所以 $\angle A=180°-(\angle ABC+\angle ACB)=60°.$

例 7 平面上有 n 个点，无 3 点共线，求证：可以通过其中某两点作一条直线，使其余的 $n-2$ 个点全都在该直线的同一侧.

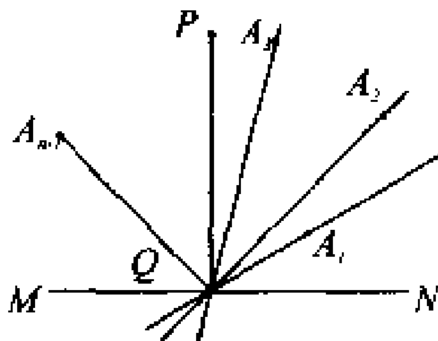


图 15－15

证明 如图 15－15，将 n 个点中距离最大的两点 P、Q 连结起来，过 Q 作 $MN\perp PQ$，则其余 $n-1$ 个点都在直线 MN 的同侧（与点 P 在同一侧）. 将 Q 点与其余 $n-1$ 个点分别连结，这些射线与 QN 成的角依次为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}(\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_{n-1})$. 将与角 α_i 对应的点记作 $Ai(i=1,2,\cdots,n-1)$，则 $A_2,A_3,\cdots,A_{n-1}$这 $n-2$ 个点都在 QA_1 的同一侧.

例 8 已知平面上有 n 条直线两两相交，求证：它们的交角中至

少有一个角不大于$\frac{180^\circ}{n}$.

证明 平面上两条相交直线可得到2对4个角.我们在平面上任取一点O分别作n条直线的平行线,这n条直线把以O为顶点的周角分成n对共$2n$个互不重叠的角,依次设为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{2n}$,则

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{2n}=360^\circ.$$

故其中必有一个角$\alpha_i\leqslant\frac{360^\circ}{2n}=\frac{180^\circ}{n}$.又该角与某两条直线的一个交角相等,故命题成立.

练 习 十 五

一、选择题

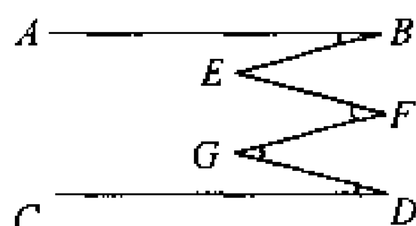
1. 在下列条件下,不能互相垂直的直线是 ( ).

(A)邻补角的平分线所在直线

(B)平行线的同旁内角平分线所在直线

(C)两组对边分别平行,一组对边方向相同,另一组对边方向相反的两个角的平分线所在直线

(D)某四边形中,若一组对角的两组对边互相垂直,那么四边形这组对角平分线所在的直线



(第2题)

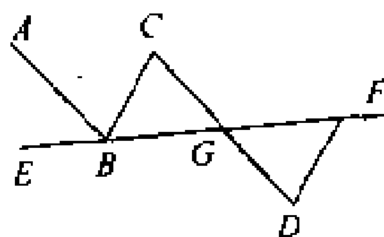
2. 如图,$AB\parallel CD$,则下列等式成立的是 ( ).

(A)$\angle B+\angle F+\angle D=\angle E+\angle G$

(B)$\angle B+\angle F+\angle C=\angle B+\angle D$

(C)$\angle F+\angle G+\angle D=\angle B+\angle E$

(D)$\angle B+\angle E+\angle F=\angle G+\angle D$



(第3题)

3. 直线AB、CD分别与EF相交,且$AB\parallel CD$(如图),BA平分$\angle CBE$,$\angle CBF=\angle DFE$,那么与$\angle D$相等的角

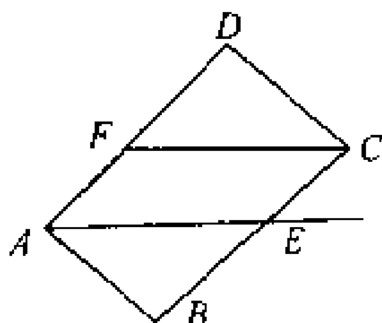
有 ( ).

(A)2 个　(B)3 个　(C)4 个　(D)5 个

4. 如图，四边形 $ABCD$ 的对角 $\angle BAD$ 与 $\angle BCD$ 的角平分线互相平行，则 ( ).

(A)$\angle B=\angle D$　(B)$\angle B$ 与 $\angle D$ 互补

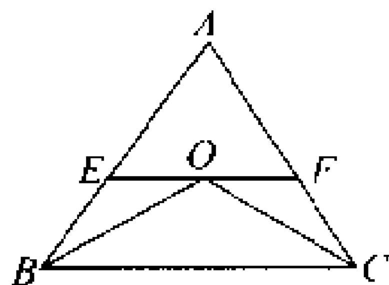
(C)$\angle B\neq\angle D$　(D)$\angle B+\angle D<180°$



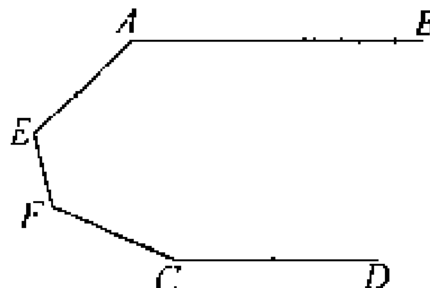
(第 4 题)

二、填空题

5. 如图，$\angle ABC=50°$，$\angle ACB=60°$，BO、CO 分别平分 $\angle ABC$、$\angle ACB$，EF 过 O 点且平行 BC，则 $\angle BOC$ 的度数为________.



(第 5 题)

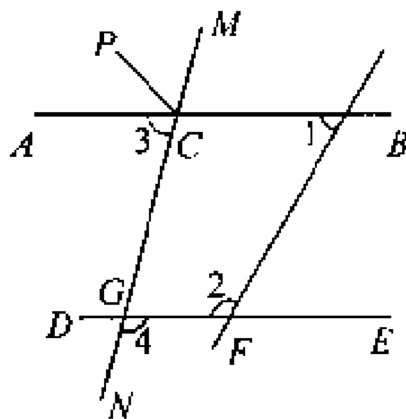


(第 6 题)

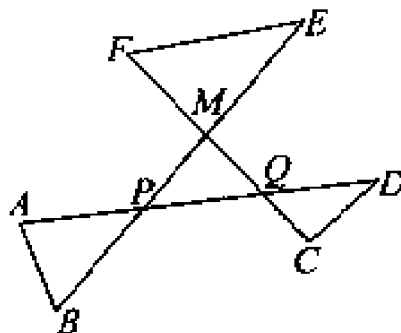
6. 如图，$AB\parallel CD$，则 $\angle A+\angle E+\angle F+\angle C$ 的度数是________.

7. 如图，$\angle 1$ 与 $\angle 3$ 互为余角，$\angle 2$ 与 $\angle 3$ 的余角互补，$\angle 4=115°$，CP 平分 $\angle ACM$，则 $\angle PCM$ ________.

8. 如图，$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F$ 的度数是________.

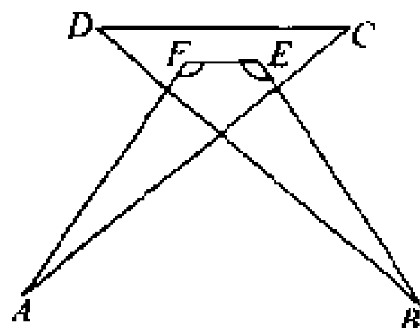


(第 7 题)

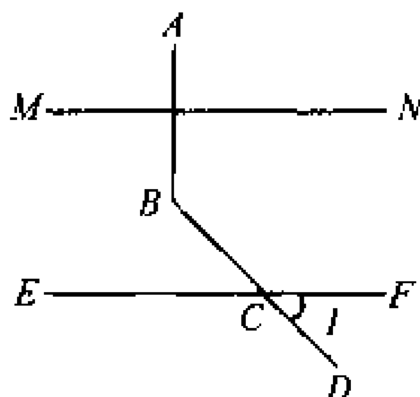


(第 8 题)

9. 如图，$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F$ 的度数是______.



(第9题)

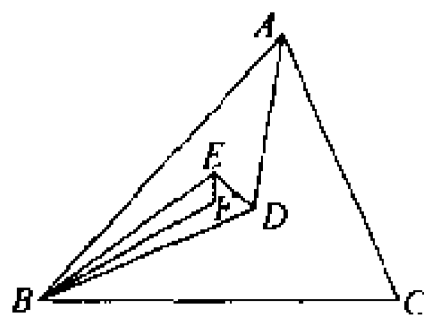


(第10题)

三、解答题

10. 如图，已知 $MN\parallel EF$，$\angle ABC=130°$，$\angle 1=40°$，求证：$AB\perp MN$.

11. 如图，$\triangle ABC$ 内有一点 D，AD、BD、CD 分别平分$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$. 又 E 为$\triangle ABD$ 内一点，AE、BE、DE 分别平分$\triangle ABD$ 各内角；F 为$\triangle BDE$ 内一点，BF、EF、DF 分别平分$\triangle BDE$ 各内角. 若$\angle BFE$ 的度数为整数，试求$\angle BFE$ 至少是多少度？



(第11题)

12. 平面上任意给定6点，无三点在同一直线上，求证：总能找到三点，使得以这三点为顶点的三角形中有不超过30°的角.

第十六讲　几何图形的计数

知识点和方法述要

1.（1）乘法原理　如果完成一件事需要 n 个步骤，做第一步有 m_1 种方法，做第二步有 m_2 种方法，…，做第 n 步有 m_n 种方法，那么完成这件事共有 $m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$ 种方法.

应用乘法原理的关键是将一个复杂的过程分解为若干个接连进行的简单过程.

（2）加法原理　如果所要计数的对象有 n 类，第一类有 m_1 种，第二类有 m_2 种，…，第 n 类有 m_n 种，那么这些对象总计有 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种.

应用加法原理的关键是将所有计数对象，依据同一标准，分为不重、不漏的若干类.

2. 两个原理是几何图形计数的基础.在具体计数过程中还常用以下方法：

（1）枚举：将几何图形一一列举进行计数.

（2）递推：用 $a_1,a_2,\cdots,a_k,\cdots$ 分别表示 $n=1,2,\cdots,k,\cdots$ 时对象的计数，若所要计数的对象数量较大时，通过建立相邻项 $a_k,a_{k+1},\cdots$ 的关系使问题得以解决.

（3）对应：如果两类对象，彼此有一个对一个，一个对二个，…等固定关系，则可对其中较易计数的一类进行计数而得知另一类对象的个数.

例题精讲

例 1　（1）如图 16－1 所示，其中有多少条不同线段？



图 16-1

(2) 如图 16-2 所示,其中有多少个不同的三角形?

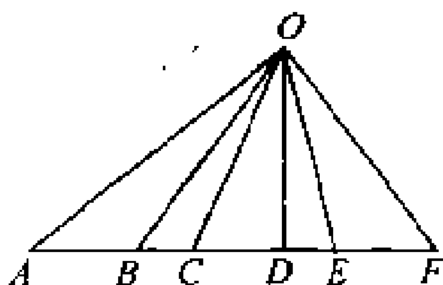


图 16-2

解 (1)对于两条线段,只要有一个端点不同,就是不同的线段,现以左端点为标准,将线段分五类分别计数:

(i) 以 A 为左端点的线段有 AB、AC、AD、AE、AF 共 5 条;

(ii) 以 B 为左端点的线段有 BC、BD、BE、BF 共 4 条;

(iii) 以 C 为左端点的线段有 CD、CE、CF 共 3 条;

(iv) 以 D 为左端点的线段有 DE、DF 共 2 条;

(v) 以 E 为左端点的线段有 EF 一条.

所以,不同的线段一共有

$$5+4+3+2+1=15(\text{条}).$$

(2) 由于所计数的三角形都是以 O 为顶点,所对的边为位于 AF 上的一条线段,所以不同三角形的个数即为线段 AF 上不同线段的条数.由(1)即知不同三角形有 15 个.

注 例 1 中(1)的解答采用了枚举法,还可分别处理:先确定线段的一个端点有 5 种情形,再确定线段的另一个端点有 4 种情形,根据乘法原理,有线段 $5\times4=20$ 条.注意到图中每条线段被重复计数 1 次,故不同线段有 10 条.

例 1 中(2)的解答运用了对应的思想方法.我们也可对(2)采取枚举方法,如以 OA、OB、…、OE 为一边,另一顶点位于右侧进行分类枚举计数.

例 2 (1) 图 16-3 中一共有多少个长方形?

(2) (1)中所有长方形的面积和是多少?

解 (1) 竖直方向有平行线 5 条,水平方向有平行线 5 条.竖直

方向取两条平行线、水平方向取两条平行线恰可围成一个长方形．反之也成立．从5条平行线中取两条的不同情形有$\frac{5\times4}{2}$种．故共有长方形

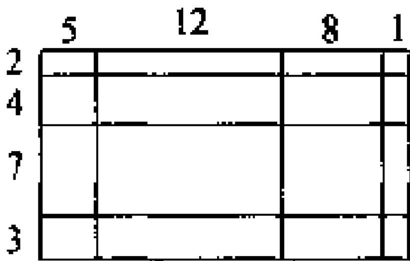


图 16-3

$$10\times10=100(\text{个}).$$

(2) 因为长的一边上的10条线段长分别为

$$5,17,25,26,12,20,21,8,9,1,$$

宽的一边上的10条线段长分别为

$$2,6,13,16,4,11,14,7,10,3,$$

所以，所有长方形面积和为

$$\begin{aligned}&(5\times2+5\times6+\cdots+5\times3)\\&+(17\times2+17\times6+\cdots+17\times3)\\&+\cdots+(1\times2+1\times6+\cdots+1\times3)\\&=(5+17+\cdots+1)\times(2+6+\cdots+3)\\&=144\times86=12384.\end{aligned}$$

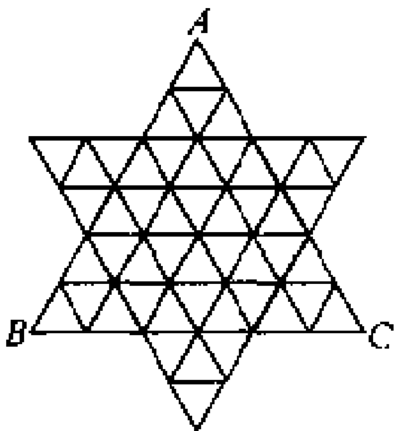


图 16-4

例3 图16-4中共有多少个三角形？

解 显然三角形可分为尖向上与尖朝下两大类．

首先对尖向上的三角形进行计数．尖向上的三角形可分为6类：

最大的三角形1个(即$\triangle ABC$)，

第二大的三角形有$1+2=3$(个)，

第三大的三角形有$1+2+3=6$(个)，

第四大的三角形有$1+2+3+4=10$(个)，

第五大的三角形有$1+2+3+4+5=15$(个)，

最小的三角形位于$\triangle ABC$内的有

$$1+2+3+4+5+6=21(\text{个}).$$

注意到$\triangle ABC$外面还有三个最小的尖向上三角形(左、右、下各一个)．故最小的三角形共24个．

由上述知尖向上的三角形共

$$1+3+6+10+15+24=59(\text{个}).$$

同理尖朝下的三角形 59 个.

图中共有三角形

$$59\times 2=118(\text{个}).$$

例 4 如图 16－5,将 8 个相同的正方形,重叠拼合在一起(要求 8 个正方形各有一条对角线重合在一直线上),问能否使出现的正方形总数超过 100 个?



图 16－5

解 如图 16－6 所示,把 7 个正方形左侧的一个顶点摆在第一个正方形对角线的八等分点上,且不妨设该正方形对角线的长为 1.

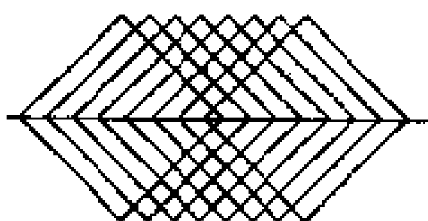


图 16－6

(ⅰ)上下两方的正方形:

以$\frac{1}{8}$为边长的有

$$(1+2+3+4+5+6)\times 2=42(\text{个});$$

以$\frac{2}{8}$为边长的有

$$(1+2+3+4)\times 2=20(\text{个});$$

以$\frac{3}{8}$为边长的有

$$(1+2)\times 2=6(\text{个});$$

(ⅱ)对角线位于同一直线上的正方形:

以$\frac{1}{8}$为边长的有 1 个;

以$\frac{2}{8}$为边长的有 2 个;

以$\frac{3}{8}$为边长的有 3 个;

以$\frac{4}{8}$为边长的有 4 个;

以$\frac{5}{8}$为边长的有 5 个；

以$\frac{6}{8}$为边长的有 6 个；

以$\frac{7}{8}$为边长的有 7 个；

以 1 为边长的有 8 个；

综合(ⅰ),(ⅱ),图中共有正方形

$$42+20+6+(1+2+3+4+5+6+7+8)=104(\text{个})$$

超过 100 个,故满足题设要求的正方形可超过 100 个.

例 5 图 16－7 中有多少个三角形?

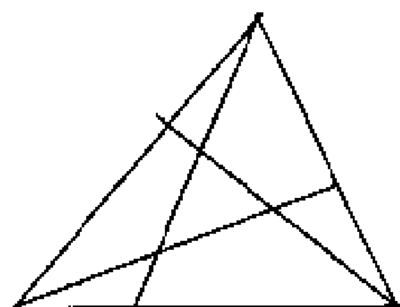


图 16－7

解 一个三角形由三条两两相交但不共点的直线所围成.

从 6 条直线中选 3 条,第一条有 6 种选法,第 2 条有 5 种选法,第 3 条有 4 种选法,共有 6×5×4 种选法,但是每一种被重复计算了 6 次,如对于直线 l_1,l_2,l_3 而言,$l_1l_2l_3,l_1l_3l_2,l_2l_1l_3,l_3l_1l_2,l_3l_2l_2$ 实际是一种,故有不同选法

$$\frac{6\times5\times4}{6}=20(\text{种}).$$

又每个顶点处有 3 条直线通过,它们不能围成三角形,因此,共有三角形

$$20-3=17(\text{个})$$

例6 在一个 8×8 的方格棋盘上,图 16－8(1)有多少个四个方格组成的“凸”字形图形?

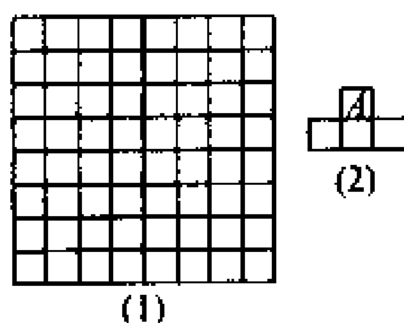


图 16－8

解 我们将“凸”字形方格中标有 A 的那个小方格称为它的“头”.(如图 16－8(2))

在 8×8 棋盘上,边上有 24 个方格可以当“头”,中间有 36 个方格可以当“头”,但边上一个“头”对应一个“凸”字形图形,中间一个“头”对应 4 个“凸”字形图形. 故一共有“凸”字形图形

$$1 \times 24 + 4 \times 36 = 168(个).$$

例 7 三角形 ABC 内部有 2000 个点，以顶点 A、B、C 及这 2000 个点能把原三角形分割成多少个小三角形？

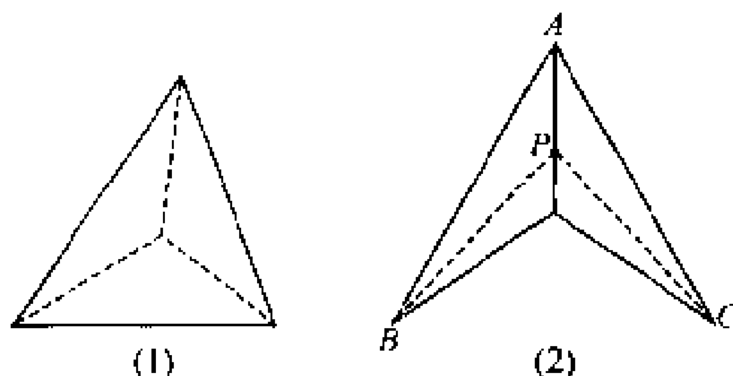


图 16-9

分析一 先从最简单情形考虑起. 若△ABC 内仅一个点，则可将原三角形分割成 3 个，增加了 2 个(如图 16-9(1)). 若再增加一个点，则有两种可能：(i)落入某个小三角形内，那么如前所述，再行分割可增加 2 个小三角形，(ii)落入某两个小三角形的公共边上(如图 16-9(2))则仍可通过分割增加 2 个三角形. 总之，无论哪种情形均增加 2 个小三角形，所以在△ABC 内每增加一个点同样都可增加 2 个三角形，所以，当△ABC 内部有 2000 个点时，可把原三角形分割成小三角形

$$1 + 2 \times 2000 = 4001(个).$$

分析二 直接转入一般情形考虑. 设△ABC 内部的 $n-1$ 个点能把原三角形分割成 a_{n-1} 个小三角形，再在△ABC 内部增加一个点，如分析二，将通过分割增加两个小三角形，于是△ABC 内部的 n 个点把原三角形分割成的小三角形个数 a_n 满足

$$a_n = a_{n-1} + 2$$

于是

$$a_1 = a_0 + 2,$$
$$a_2 = a_1 + 2,$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
$$a_{2000} = a_{1999} + 2.$$

将上述各式相加，即得

$$a_{2000} = a_o + 2 \times 2000.$$

易知 $a_o = 1$,故 $a_{2000} = 4001$.

注 分析二采用了递推的方法.

例 8 平面上 5 个圆和一条直线最多能把平面分成多少不重叠部分?

解 1 个圆最多能把平面分成 2 个部分;2 个圆最多能把平面分成 4 个部分;3 个圆最多能把平面分成 8 个部分;现在加入第 4 个圆,为了使分成的部分最多,第 4 个圆必须与前面 3 个圆都有两个交点.如图 16 - 10 所示,因此得 6 个交点,这 6 个交点将第 4 个圆的圆周分成 6 段圆弧,而每一段圆弧将原来的部分一分为二,即增加了一个部分,于是,4 个圆最多将平面分成 $8+6=14$ 个部分.

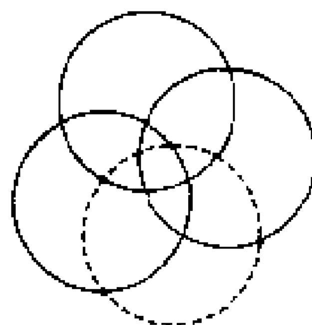


图 16 - 10

同样道理,5 个圆最多将平面分成 $14+8=22$ 个部分.

现在加入一条直线.由于一条直线最多与一个圆有 2 个交点,所以一条直线与 5 个圆最多有 10 个交点,被分成 11 段,其中 9 段在圆内,2 条射线在圆外,在圆内的每条线段把原来的一分为二,这样增加了 9 个部分,两条射线使得圆外增加了一个部分.总共增加了 10 个部分.

因此,5 个圆和 1 条直线,最多将平面分成 $22+10=32$ 个部分.

注 可利用递推的方法计算 5 个圆把平面分成的最多部分.设平面上 n 个圆最多把平面分成 a_n 部分,则第 n 个圆与前 $n-1$ 个圆都有两个交点,这 $2(n-1)$ 个交点将该圆分成 $2(n-1)$ 个圆弧,而每一段圆弧又将原来部分一分为二,从而增加了 $2(n-1)$ 个部分,所以,当 $n \geqslant 2$ 时有

$$a_n = a_{n-1} + 2(n-1).$$

于是

$$a_2 = a_1 + 2(2-1),$$

$$a_3 = a_2 + 2(3-1),$$

$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots$$

$$a_5 = a_4 + 2(5-1).$$

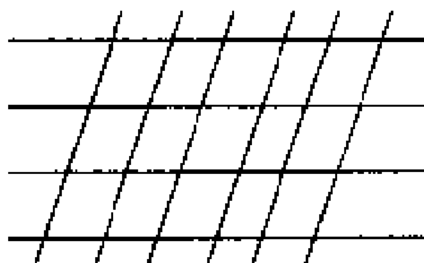
相加且利用 $a_1=2$,得

$$a_5 = a_1 + 2(1+2+3+4) = 22.$$

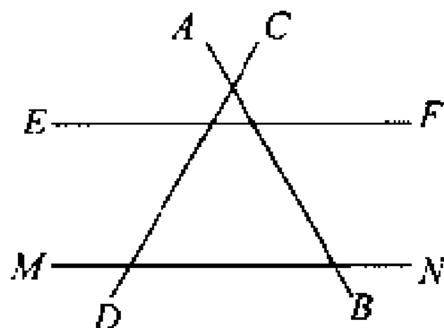
练 习 十 六

一、填空题

1. 有两组不同方向的平行线(如图),一组有 4 条,另一组有 6 条,它们彼此相交,则图中共有平行四边形________个.



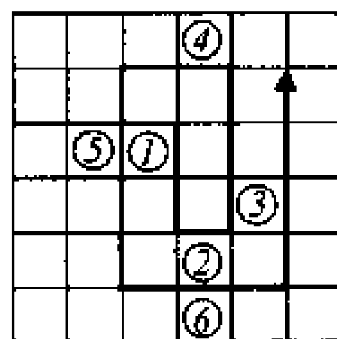
(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图,平行直线 EF、MN 与相交直线 AB、CD 相交,可得同旁内角 n 对,则 $n=$________.

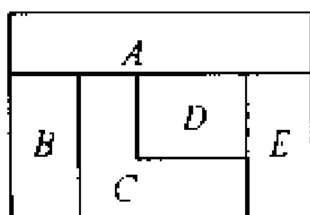
3. 在各边长都是 1 的正方形方格纸上画着如图所示的折线.它们的各段依次标着①,②,③,④…的序号,那么㉔号线段的长度是________.



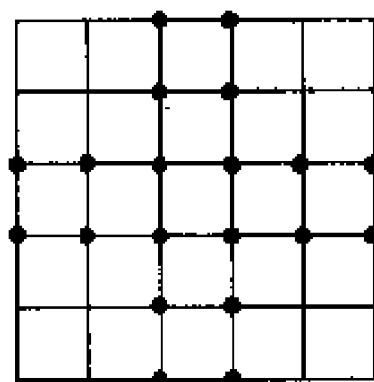
(第 3 题)

4. 如图,有 A,B,C,D,E 五个区域分别用红、蓝、黄、白、绿五种颜色中的某一种颜色.若要使相邻的区域染上不同的颜色,则有不同染色方法________种.

5. 5×5 的棋盘上放了二十枚棋子(如图).以这些棋子为顶点的正方形有________个.



(第 4 题)



(第 5 题)

二、解答题

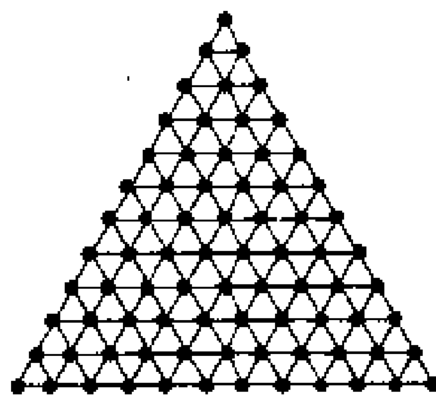
6. 图中每相邻的三个圆点组成一个小三角形. 问图中这样的小三角形个数多还是圆点个数多?

7. 某玩具厂生产大小一样的正方体形状的积木，每个面分别涂上红、黄、蓝 3 种颜色中的 1 种，每色各涂 2 个面，当两个积木经过适当的翻动后，能使各种颜色的面所在位置相同时，它们就被看作是同一种积木块. 试说明:最多能涂成多少种不同的积木块?

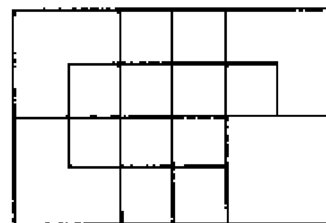
8. 将一个圆形纸片用直线划分成大小不限的若干小纸片. 如果要分成不少于 50 个小纸片，至少要画多少条直线? 请说明.

9. 平面上有 10 条直线，任何三条都不交于一点，是否可能恰有 31 个交点?

10. 图中共有多少个长方形?

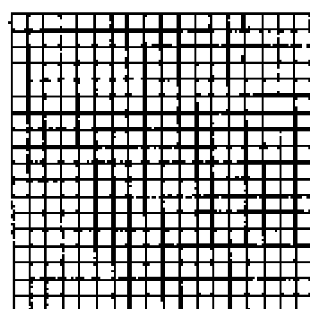


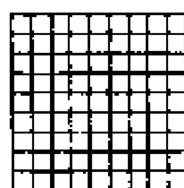
(第 6 题)



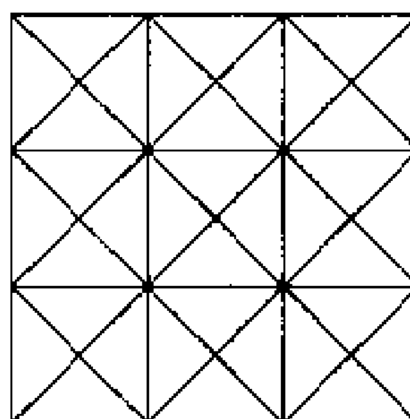
(第 10 题)

11. 如图(1)，围棋盘上有横竖各 19 条线，在棋盘上组成许多大小不同的正方形，问其中有 9×9 的小正方形(图(2))多少个?


图（1）


图（2）

（第11题）



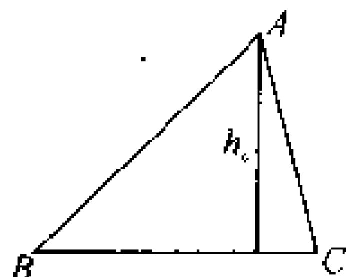
（第12题）

12. 图中不同的长方形(包括正方形)有多少个？

第十七讲 面 积

知 识 点 和 方 法 述 要

1.（ⅰ）$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ah_a$；$S_{\square ABCD}=ah_a$（$h_a$ 表示 a 边上的高，如图 17－1）.



17－1

（ⅱ）两个等底三角形面积之比，等于它们的对应高的比.

（ⅲ）两个等高的三角形面积的比等于它们的对应底的比.

（ⅳ）多边形可以分割成若干个三角形，三角形的面积是解决多边形面积问题的基础.

2. 若两直线平行，则其中任一直线上的点到另一平行线的距离相等，反之亦成立.

3. 有些问题尽管表面上没有涉及面积，但我们可以通过不同角度对某个三角形或其他图形的面积的计算得到重要关系式，使问题得以解决.这种方法我们称为面积法.

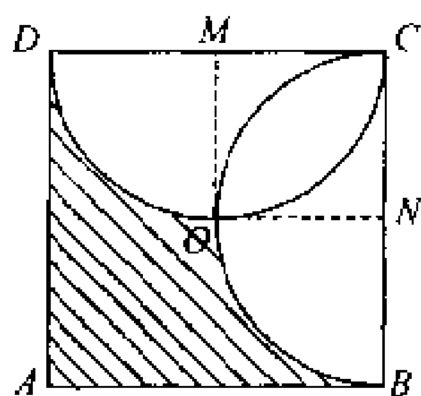
例 题 精 讲

例1 如图 17－2，正方形 $ABCD$ 的边长为 a 分别以 BC、CD 为直径作半圆，求图中的阴影部分面积.

解 过 O 作 $OM\perp CD$，$ON\perp BC$.将正方形中非阴影部分分割成一个小正方形和两个$\frac{1}{4}$圆.于是所求阴影部分面积为

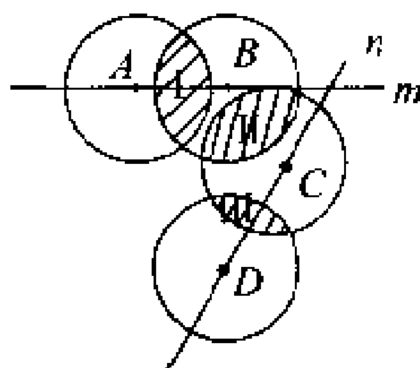
$$S=a^2-[(\frac{1}{2}a)^2+2\times\frac{1}{4}\pi(\frac{a}{2})^2]$$

$$=\frac{(6-\pi)a^2}{8}.$$



17－2

例2 如图 17－3，纸上画了四个大小一样的圆，圆心分别是 A、B、C、D. 用 S 表示一个圆的面积，阴影部分Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ分别是圆 A 与圆 B、圆 B 与圆 C、圆 C 与圆 D 的公共部分，它们的面积分别为 S_1，S_2，S_3. 直线 m 经过 A、B，直线 n 经过 C、D，阴影部分Ⅱ正好夹在直线 m、n 之间. 如果四个圆在纸上盖住的总面积为 $5(S-1)$，直线 m、n 之间被圆盖住的面积是 8，$S_3=\frac{1}{3}S_1=\frac{1}{3}S_2$. 求 S.



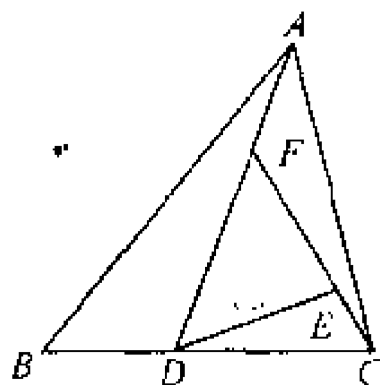
17－3

解 依题设，可得

$$\begin{cases}4S-S_1-S_2-S_3=5(S-1),\\ 2S-\frac{1}{2}S_1-S_2-\frac{1}{2}S_3=8,\\ S_3=\frac{1}{3}S_1=\frac{1}{3}S_2.\end{cases}$$

解此方程，可得 $S=4\frac{5}{19}$.

例3 如图 17－4，$S_{\triangle ABC}=1$，$BD=\frac{1}{2}DC$，$AF=\frac{1}{2}FD$，$CE=\frac{1}{2}EF$. 求 $S_{\triangle DEF}$.



17－4

分析 直接求△DEF 面积有困能，观察图形，发现△DEF 与△DCF 有公共顶点，所对底边在同一直线上，具有相同的高，所以

$$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle DCF}}=\frac{EF}{CF}=\frac{2}{3}. \qquad ①$$

同理

$$\frac{S_{\triangle DCF}}{S_{\triangle DCA}}=\frac{DF}{DA}=\frac{2}{3}. \qquad ②$$

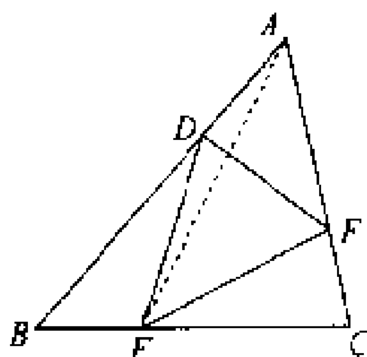
$$\frac{S_{\triangle DCA}}{S_{\triangle BCA}}=\frac{DC}{BC}=\frac{2}{3}. \qquad ③$$

由①,②,③得

$$S_{\triangle DEF}=\frac{2}{3}S_{\triangle DCF}=(\frac{2}{3})^2S_{\triangle DCA}$$

$$=(\frac{2}{3})^3S_{\triangle BCA}=\frac{8}{27}.$$

例 4　如图 17－5, $AD=\frac{1}{3}AB$, $BE=\frac{1}{3}BC$, $CF=\frac{1}{3}CA$,求证:$S_{\triangle DEF}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$.



17－5

分析　欲证 $S_{\triangle DEF}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$,只须证明

$$S_{\triangle ADF}+S_{\triangle BDE}+S_{\triangle CEF}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}.$$

连 AE, 把 $\triangle ABC$ 分割成 $\triangle ABE$、$\triangle AEC$, 因 $\triangle BDE$ 与$\triangle ABE$ 同高,故

$$\frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle BAE}}=\frac{BD}{BA}=\frac{2}{3}. \qquad ①$$

又$\triangle BAE$ 与$\triangle BAC$ 同高,有

$$\frac{S_{\triangle BAE}}{S_{\triangle BAC}}=\frac{BE}{BC}=\frac{1}{3}. \qquad ②$$

由①,②得

$$S_{\triangle BDE}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}S_{\triangle BAC}=\frac{2}{9}S_{\triangle ABC}.$$

同理

$$S_{\triangle CEF}=\frac{2}{9}S_{\triangle ABC},$$

$$S_{\triangle ADF}=\frac{2}{9}S_{\triangle ABC}.$$

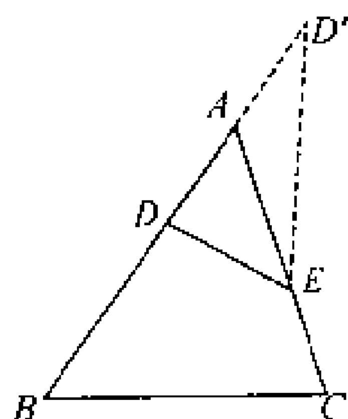
所以,

$$S_{\triangle ADF}+S_{\triangle BDE}+S_{\triangle CEF}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}.$$

注　从例 4 中不难看出以下重要结论:图 17－6 中,有

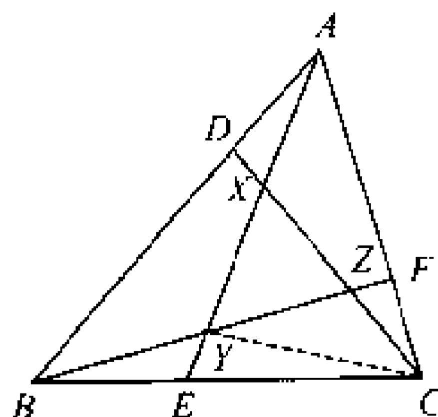
$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AD\cdot AE}{AB\cdot AC}$$

进而易知 D 位于 AB 反向延长线上时结论亦成立.



17－6

例 5 如图 17－7，$S_{\triangle ABC}=1$，$AD=\frac{1}{3}AB$，$BE=\frac{1}{3}BC$，$CF=\frac{1}{3}CA$．CD、AE、BF 两两相交于 X、Y、Z，求$\triangle XYZ$ 的面积.



17－7

分析　连 CY，设 $S_{\triangle BEY}=S$，则

$$\frac{S_{\triangle YBE}}{S_{\triangle YBC}}=\frac{BE}{BC}=\frac{1}{3}$$

有 $S_{\triangle YBC}=3S$

因
$$\frac{S_{\triangle YCF}}{S_{\triangle YAF}}=\frac{CF}{FA},$$

$$\frac{S_{\triangle BCF}}{S_{\triangle BAF}}=\frac{CF}{FA},$$

$$故\frac{S_{\triangle BAY}}{S_{\triangle BCY}}=\frac{S_{\triangle BAF}-S_{\triangle YAF}}{S_{\triangle BCY}-S_{\triangle YCF}}=\frac{FA}{CF}=2.$$

可得 $S_{\triangle BAY}=6S$，进而，有

$$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle BAY}+S_{\triangle BEY}=7S$$

又
$$\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{3},$$

故
$$S_{\triangle ABC}=21S=1,$$

可得 $S=\frac{1}{21}$．故 $S_{\triangle BAY}=\frac{6}{21}$.

同理 $S_{\triangle CAX}=S_{\triangle BCZ}=\frac{6}{21}$.

于是，有

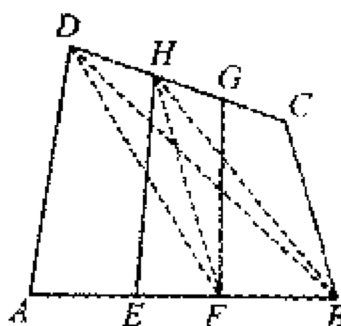
$$S_{\triangle XYZ}=S_{\triangle ABC}-(S_{\triangle BAY}+S_{\triangle CAX}+S_{\triangle BCZ})$$

$$= 1 - \frac{6}{21} \times 3$$

$$= \frac{1}{7}.$$

例 6 如图 17－8，E、F 是 AB 的三等分点，G、H 是 CD 的三等分点，试证：

$$S_{四边形EFGH} = \frac{1}{3} S_{四边形ABCD}.$$



17－8

证明 连接 DB、DF、HF、HB，则 $S_{\triangle DFB} = \frac{1}{3} S_{\triangle DAB}$，$S_{\triangle BHD} = \frac{1}{3} S_{\triangle BCD}$，故

$$S_{\triangle DFB} + S_{\triangle BHD} = \frac{1}{3}(S_{\triangle DAB} + S_{\triangle BCD}),$$

即 $$S_{四边形DFBH} = \frac{1}{3} S_{四边形ABCD} \quad ①$$

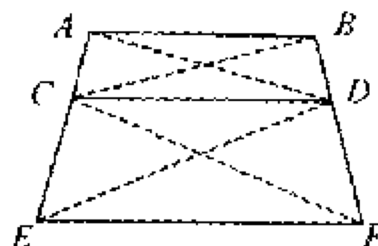
因 $$S_{\triangle GFH} = S_{\triangle FHD}, S_{\triangle HEF} = S_{\triangle HFB},$$

故 $$S_{四边形EFGH} = S_{四边形DFBH}. \quad ②$$

由①，②可得

$$S_{四边形EFGH} = \frac{1}{3} S_{四边形ABCD}.$$

例 7 如图 17－9，$AB \parallel CD \parallel EF$，求证：$AC : CE = BD : DF$.



17－9

证明 连结 AD、BC、CF、DE. 因 $AB \parallel CD \parallel EF$. 故

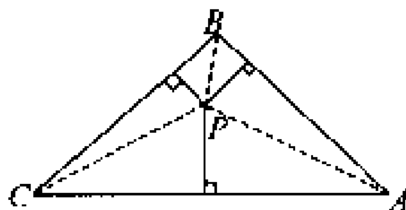
$$S_{\triangle ACD} = S_{\triangle BCD}, S_{\triangle ECD} = S_{\triangle FCD},$$

又 $S_{\triangle ACD} : S_{\triangle ECD} = AC : CE$，$S_{\triangle BCD} : S_{\triangle FCD} = BD : DF$，所以 $AC : CE = BD : DF$.

注 A、B 重合时上述结论也成立.

例 8 如图 17－10，已知$\triangle ABC$ 中，$AB = 4$，$BC = 5$，$CA = 6$. P 是$\triangle ABC$ 的形内或边上任一点，P 到三边距离之和是 T. 问：当 P 在什

么位置时，T 有最大值或最小值？



17－10

解 设△ABC 的面积为 S，P 到三边 AB、BC、CA 的距离分别为 x,y,z.

$$S=\frac{1}{2}(AB\cdot x+BC\cdot y+CA\cdot z)$$

$$=\frac{1}{2}(4x+5y+6z).$$

又 $$4x+4y+4z\leqslant 4x+5y+6z=2S,$$

即 $$x+y+z\leqslant\frac{1}{4}(4x+5y+6z)=\frac{1}{2}S.$$

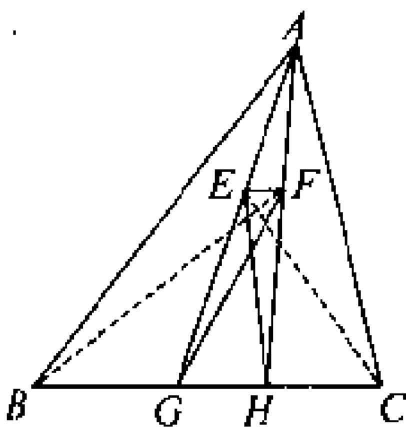
等号当 $y=z=0$ 时成立.

且 $$6x+6y+6z\geqslant 4x+5y+6z=2S,$$

即 $$x+y+z\geqslant\frac{1}{6}(4x+5y+6z)=\frac{1}{3}S.$$

等号当 $x=y=0$ 时成立.

所以 $x+y+z$ 的最大值为 $\frac{1}{2}S$，此时 P 与 C 点重合；$x+y+z$ 的最小值为 $\frac{1}{3}S$，此时 P 与 B 点重合.



17－11

例 9 如图 17－11，$EF/\!/BC$，$BG=HC$，$FG/\!/AB$，求证：$EH/\!/AC$.

分析 欲证 $EH/\!/AC$，只须证 $S_{\triangle AEH}=S_{\triangle CEH}$. 因 $EF/\!/BC$，所以 $S_{\triangle EFH}=S_{\triangle EFG}$，可知 $S_{\triangle AEH}=S_{\triangle AFG}$，所以 $S_{\triangle AEH}=S_{\triangle AFC}$. 又 $BG=HC$，可得 $S_{\triangle FBG}=S_{\triangle ECH}$. 于是因 $FG/\!/AB$，有 $S_{\triangle AFG}=S_{\triangle BFG}$，可得 $S_{\triangle AEH}=S_{\triangle CEH}$，可知 $EH/\!/AC$.

图示如下：

$$EH/\!/AC$$

$$\Uparrow$$

$$S_{\triangle AEH}=S_{\triangle CEH}$$

$EF/\!/BC$

$\Downarrow$

$S_{\triangle EFG}=S_{\triangle EFH}$ $\quad\|\quad\quad\|$ $EF/\!/BC$，$BG=HC$

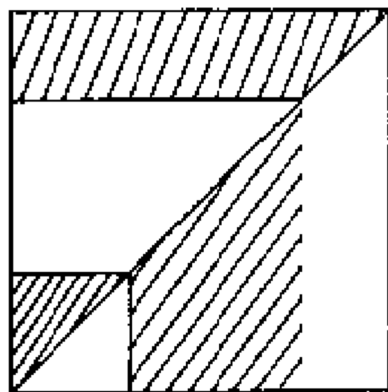
$$S_{\triangle AFG}\overset{FG/\!/AB}{=}S_{\triangle BFG}$$

练 习 十 七

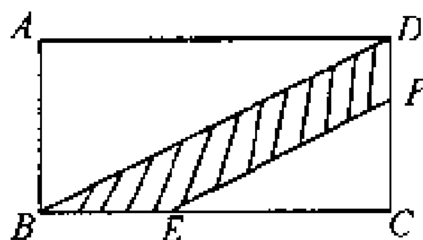
一、选择题

1. 如图，阴影部分面积占总面积的 ( ).

(A)$\frac{2}{5}$ (B)$\frac{5}{12}$ (C)$\frac{3}{7}$ (D)$\frac{1}{2}$



（第 1 题）



（第 2 题）

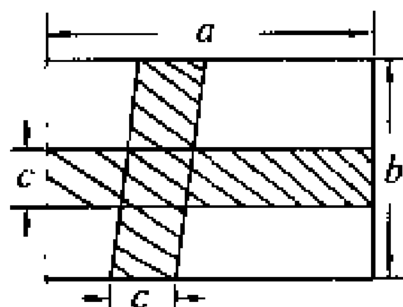
2. 如图，长方形 $ABCD$ 中，F 为边 CD 的中点，$BC=3BE$，则长方形 $ABCD$ 的面积等于阴影部分面积的 ( ).

(A)2 倍 (B)3 倍 (C)4 倍 (D)5 倍.

3. 如图，长为 a，宽为 b 的长方形中，一阴影部分为长方形，长、宽分别为 a，b，另一阴影部分是底为 c 平行四边形，则图中阴影部分外的图形面积是 ( ).

(A)$ab-(a+b)c$ (B)$ab-(a-b)c$

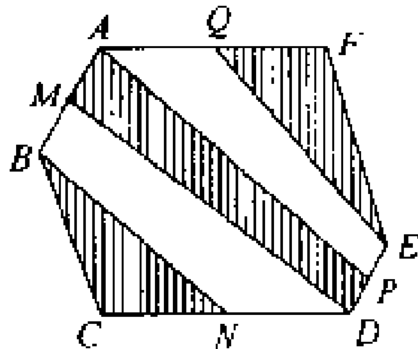
(C)$(a-c)(b-c)$ (D)$(a-c)(b+c)$



（第 3 题）

二、填空题

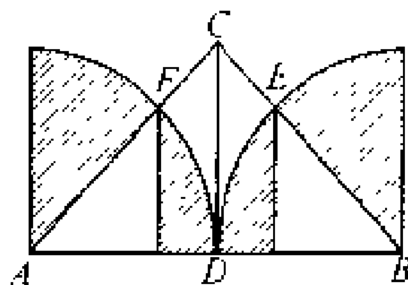
4. 如图，六边形 $ABCDEF$ 的面积是 8，M 是 AB 的中点，N 是 CD 的中点，P 是 DE 的中点，Q 是 AF 的中点，则图中阴影部分的面积为________.



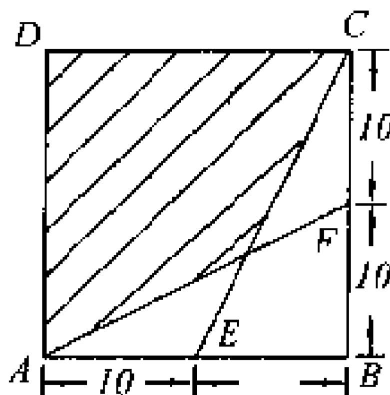
（第 4 题）

5. 如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=$

BC，D 为 AB 中点，$AB=20\text{cm}$，则图中阴影部分面积是________（π 取 3.14）.



（第 5 题）



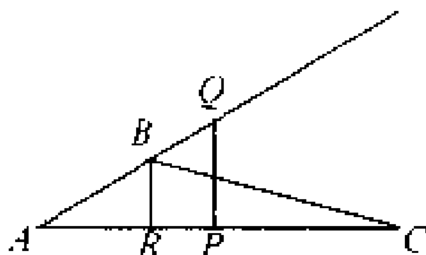
（第 6 题）

6. 图中所标数字单位是 cm，则阴影部分的面积是________.

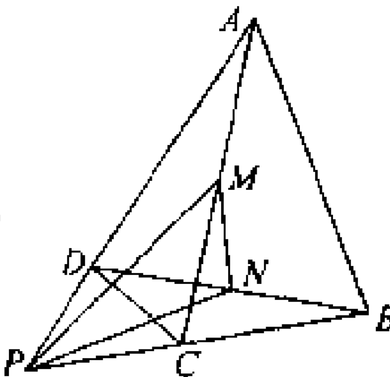
7. 已知$\triangle ABC$ 中，$AB=AC=12\text{cm}$，$S_{\triangle ABC}=42\text{cm}^2$，$P$ 是 BC 边上一点，P 到 AB、AC 的距离为 d_1，d_2，d_1+d_2 的值是________.

三、解答题

8. 如图，P 是$\triangle ABC$ 的 AC 边的中点，PQ 垂直 AC 且交 AB 延长线于 Q，$BR\perp AC$ 于 R，求证：$S_{\triangle ARQ}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.



（第 8 题）

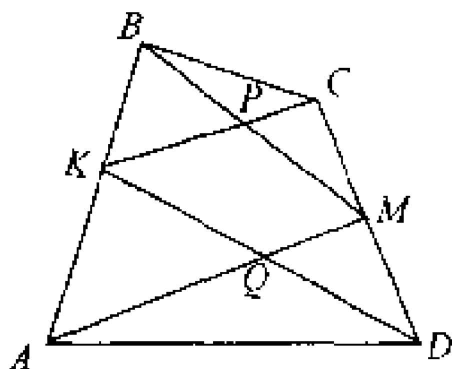


（第 9 题）

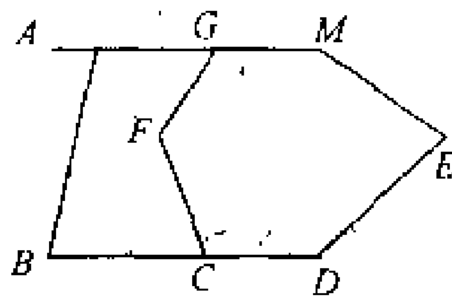
9. 如图，M、N 分别是 AC、BD 的中点，求证：

$$S_{\triangle PMN}=\frac{1}{4}S_{\text{四边形}ABCD}.$$

10. 如图，K、M 分别是 AB、CD 的中点，AM、KD 交于 Q，BM、KC 交于 P. 求证：$S_{\text{四边形}MQKP}=S_{\triangle BPC}+S_{\triangle AQD}$.



（第 10 题）



（第 11 题）

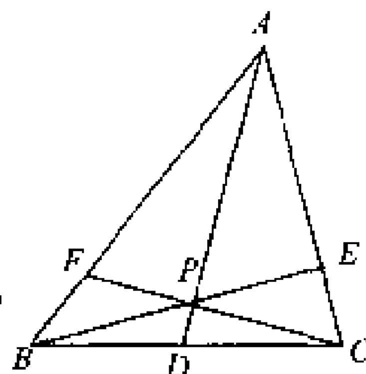
11. 如图，两块土地之间有一条小路 CFG，试作一条过点 C 的直路，要求保持两旁土地的面积不变.

12. 如图，P 为△ABC 内一点，D、E、F 分别在 BC、CA、AB 上，且 AD、BE、CF 交于 P，求证：

(1) $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$；

(2) $\frac{PD}{AD}+\frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}=1$；

(3) $\frac{AP}{PD}$、$\frac{BE}{EP}$、$\frac{CF}{FP}$ 中至少有一数不小于 2，还有一数不大于 2.



（第 12 题）

第十八讲　十进制整数

知识点和方法述要

整数的表示方法是多种多样的，其中最常用的是十进制方法.在十进制意义下，正整数$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}$是和式

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$$

的简单记法，其中 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ 都是取自 0 到 9 的整数，并且 $a_n \neq 0$.这种以 10 的方幂的降幂形式表示整数的方法又叫科学计数法.

正整数的进位制还有 2 进制、8 进制、16 进制、60 进制等，如

$$M = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 2 + a_o.$$

其中 $a_o, a_1, \cdots, a_n$ 从 0,1 这两个数字中取值，且 $a_n \neq 0$，那么 M 就是一个二进位整数，计算机的设计常值用二进制.

二进制可简记为

$$M = (a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_o)_2$$

以后若不加说明，所计整数都是十进制整数.

例题精讲

例 1　若一个两位数，加上 2 之后的各位数字之和只有原数字和的一半，求所有这样的两位数.

分析　设两位数为 $A = \overline{xy}$.依题设 A 加上 2 后数字之和变小，说明个位发生了进位，故加上 2 后的数可表示为

$$\overline{xy} + 2 = 10x + y + 2 = 10(x+1) + (y + 2 - 10).$$

从而有

$$(x+1)+(y+2-10)=\frac{1}{2}(x+y),$$

即
$$x+y=14.$$

解得$\begin{cases}x=8,\\y=6,\end{cases}\begin{cases}x=6,\\y=8,\end{cases}\begin{cases}x=9,\\y=5,\end{cases}\begin{cases}x=5,\\y=9.\end{cases}$

经检验符合条件的数有 68,59.

例 2 在一种室内游戏中,魔术师要求某参赛者想好一个三位数$\overline{abc}$,然后,魔术师再要求他记下五个数$\overline{acb}$、$\overline{bac}$、$\overline{bca}$、$\overline{cab}$、$\overline{cba}$,并把这五个数加起来求出和 N,只要讲出 N 的大小,魔术师就能说出原数$\overline{abc}$是什么.如果 $N=3194$,请你确定$\overline{abc}$.

解 依题设,得

$$\overline{acb}+\overline{bac}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{cba}=3194.$$

两边加上$\overline{abc}$,得

$$222(a+b+c)=3194+\overline{abc},$$
$$222(a+b+c)=222\times 14+86+\overline{abc}.$$

所以$\overline{abc}+86$是 222 的倍数,且 $a+b+c>14$.设$\overline{abc}+86=222n$.考虑到$\overline{abc}$是三位数,依次取 $n=1,2,3,4$,分别得出$\overline{abc}$的可能值为 136,358,802,结合 $a+b+c>14$,知 $abc=358$.

例 3 某三位数,如果它本身增加 3,那么新的三位数的各位数字之和就减少到原来三位数的$\frac{1}{3}$,试求一切这样的三位数.

解 该数的末位数不可能小于 7.否则它加 3 以后各位数字的和要增加 3.前两位数都不是 9,因为此时加 3 后各位数字的和减少到$\frac{1}{3}$以下.设在$\overline{abc}$中,$a<9,b=9,c>6$,如果这样的数满足题意,那么

$$3[(a+1)+(c+3-10)]=a+9+c.$$

由此得 $2a+2c=27$,这不可能.

最后,设数$\overline{abc}$满足题意,令 $b<9,c>6$,则

$$3[a+(b+1)+(c+3-10)]=a+b+c.$$

由此得 $a+b+c=9$. 考虑 $a\geqslant 1, c\geqslant 7$, 从而得三数 117, 207, 108.

例 4 试找出所有这样的正数 a, 其末位数是 4, 而其各位数字的平方和不小于 a.

解 如果 a 是 3 位或 3 位以上的正整数. 则有

$$\begin{aligned} a &= 10^n a_n + 10^{n-1}a_{n-1} + \cdots + 10^2 a_2 + 10a_1 + 4 \\ &\geqslant 10a_n + 10a_{n-1} + \cdots + 10a_2 + 10a_1 + 4 + 90a_n \\ &> a_n^2 + a_{n-1}^2 + \cdots + a_2^2 + a_1^2 + 4^2 \end{aligned}$$

故知在三位及位数便多的正整数中没有这样的 a. 如果 a 是两位数或一位数, 则 $a=10x+4\leqslant x^2+4^2$(其中 x 是 0 至 9 的整数, 由此可得 a 为 4, 14 或 94.

例 5 已知一个四位数的各位数字的和与这个四位数相加等于 1995, 试求这个四位数.

解 设所求四位数是 $\overline{abcd}$, 依题设得

$$a+b+c+d+\overline{abcd}=1995.$$

即

$$1001a+101b+11c+2d=1995. \qquad ①$$

此时显然有 $a=1$. 于是①可变为

$$101b+11c+2d=994. \qquad ②$$

此时必有 $b=9$. 否则左边 $\leqslant 925<994$, 矛盾. 于是②变为

$$11c+2d=85.$$

若 $c\leqslant 8$, 则 $11c+2d>85$; 若 $c\leqslant 6$, 则 $11c+2d<85$. 故 $c=7$. 将 $c=7$ 代入②得 $d=4$, 故所求四位数为 1974.

例 6 一个正整数, 如果它的各位数字之和再加它的各位数之积恰好与此数相等, 这样的正整数我们叫做"巧数", 例如 $29=(2+9)+(2\times 9)$ 就是一个巧数, 试求两位数中的所有"巧数". 在三位数中有无"巧数"? 如果有, 有几个? 如果无, 请证明你的结论.

解 在两位数中, 设"巧数"为 $10a+b$, 则

$$(a+b)+ab=10a+b,$$

即

$$ab=9a.$$

因为 a 是十位数字, 所以 $a\neq 0$, 可得 $b=9$. 此时 a 可取 1, 2, …,

9共9个数，即两位数中的“巧数”共有9个，它们是

$$19,29,39,\cdots,99.$$

在三位数中，设“巧数”为 $100a+10b+c$，则

$$(a+b+c)+abc=100a+10b+c,$$

$$a(bc-99)=96.$$

因为 $b=9$，$c\leqslant 9$. 所以不论 b，c 取何数，都有 $bc-99<0$，因而只有 $a=b=c=0$，与 a 是百位数字（$a\neq 0$）矛盾. 故三位数中无“巧数”.

例7 一个自然数 n 乘以874，得到的结果是以92结尾的五位数，求数 n.

解 设 x 是给定的五位数，则 $x=874n$，所以 $\frac{10000}{874}\leqslant n\leqslant\frac{99999}{874}$，即 $12\leqslant n\leqslant 114$. x 的最后两位数92是相应的乘积 $74\times\overline{ab}$ 末尾两位数. 其中 $\overline{ab}$ 是 n 的末尾两位数，所以 $100m+92=74\times(10a+b)$，其中 m 为自然数. 乘积 $4b$ 的末尾数字是2，所以 $b=3$ 或 $b=8$. 若 $100m+92=74(10a+3)$，即 $100m=740m+130$，则 $13=2(5m-37a)$. 这显然不可能. 因为等式两边奇偶性不一致. 若 $b=8$，则 $100m+92=74(100+8)$，即 $100m=740m+500$，因此 $74a=5(2m-10)$，a 是5的倍数，即 $a=0$ 或5. 从12到144末尾为08和58的数只有108和58，即为所求.

例8 设 $n=2^{1991}$. 若 n 用十进制表示，它的末两位数是多少？

分析 n 是1991个2的连乘积. 首先从 2^r 的较低次幂入手寻找规律，列表如下：

n	n 的十位数字	n 的个位数字	n	n 的十位数字	n 的个位数字
2^1	0	2	2^{12}	9	6
2^2	0	4	2^{13}	9	2
2^3	0	8	2^{14}	8	4
2^4	1	6	2^{15}	6	8
2^5	3	2	2^{16}	3	6

2^6	6	4	2^{17}	7	2
2^7	2	8	2^{18}	4	4
2^8	5	6	2^{19}	8	8
2^9	1	2	2^{20}	7	6
2^{10}	2	4	2^{21}	5	2
2^{11}	4	8	2^{22}	0	4

观察上表,容易发现自 2^2 开始每隔 20 个 2 的连乘积,末两位数字就重复出现,周期为 20. 因为 $1990 \div 20 = 99 \cdots\cdots 10$,所以 2^{1991} 的末两位数字相同,由上表知 2^{11} 的十位数字是 4,个位数字是 8. 所以,n 的末两位数字是 48.

例 9 求最大整数 A,使对于由 1 到 100 的全部自然数的任一排列,其中都有 10 个(位置)连续的数,其和大于或等于 A.

解 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$ 是从 1 到 100 的自然数的一个排列,记 M 为所有连续 10 个数的和中最大者,有

$$M \geqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_{10},$$
$$M \geqslant a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{20},$$
$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots$$
$$M \geqslant a_{91} + a_{92} + \cdots + a_{100}.$$

相加即得

$$10M \geqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}$$
$$= 1 + 2 + \cdots + 100 = 5050.$$

故 $M \geqslant 505$. 依题设,$A \leqslant M$,若自然数排列如下:100,1,99,2,98,3,$\cdots$,51,50,则任何连续 10 项之和为 500 或 505,故 $A = 505$.

练 习 十 八

一、选择题

1. a 表示一个两位数,b 表示一个四位数,把 a 放在 b 的左边组成一个六位数,那么这个六位数应表示成 (　　).

(A) ab　　　　　　　　(B) $10000a+b$

(C) $100a+1000b$　　　　(D) $100a+b$

2. 7025^{1907}的末两位数字是　　　　　　　　(　　).

(A)15　　(B)25　　(C)45　　(D)55

3. 1993^{1993}的个位数字是　　　　　　　　(　　).

(A)1　　(B)3　　(C)7　　(D)9

二、填空题

4. 有两个三位数,其余所有的三位数之和是这两个三位数之一的 600 倍,则这两个三位数的和是________.

5. 有一四位数$\overline{abcd}$,满足

$$\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a=1989,$$

则这个四位数是________.

6. 将一个三位数的数字重新排列所得的最大三位数减去最小的三位数正好等于原数,则这个三位数是________.

7. 紧接着 1989 后面写串数字,写下的每个数字都是它前面两个数字的乘积的个位数。例如 $8\times9=72$,在 9 后面写 $2,9\times2=18$,在 2 后面写 8……得到一串数字:

$$1,9,8,9,2,8,6,\cdots$$

这串数从 1 开始往右数,第 1989 个数是________.

三、解答题

8. 甲、乙、丙 3 个人的年龄满足以下条件:

(i) 甲的年龄是一个两位数;

(ii) 把甲的年龄的两个位数字对调就是乙的年龄;

(iii) 甲的年龄与乙的年龄的差的$\frac{1}{3}$就是丙的年龄;

(iv) 乙的年龄是丙的年龄的 15 倍.

试求甲、乙、丙三个的年龄.

9. 求各位数字不同的三位数,使它等于所有由它的数字组成的两位数之和.

10. 如果一个三位数 a_1, a_2, a_3 满足 $a_2 < a_1, a_2 < a_3$，那么称这个三位数为"凹数"，而 123，121 都不是"凹数"，求所有"凹数"的个数.

11. 一个六位数，当它分别乘以 2,3,4,5,6 时，所得的 5 个乘积仍然都是六位数，而且每个六位数的全部数字都是原来六位数的数字，求原来的六位数.

12. 2000 个学生坐成一圈，依次标号为 1,2,3,…,2000. 现在进行 1,2 报数：1 号学生报 1 并留下，2 号学生报 2 后立即离开，3 号学生报 1 留下，4 号学生报 2 后立即离开…. 一般地，学生们依次交替报 1 或 2，凡报到 1 的学生继续留下，报到 2 的学生立即离开. 如此下去. 直到还剩下最后一个人，问他是几号学生？

13. 在宽大无边的方格纸上(每个小方格的边长为 1)，规定只允许沿着小方格的边线剪开. 证明：对任意整数 $m > 12$，可以剪出一个面积大于 m，边长大于 1 的矩形，但不能再从这个矩形剪出一个面积为 m 的矩形.

第十九讲　数的整除性

知识点和方法述要

1. 对于两个整数 $a,b(b\neq0)$,若存在一个整数 q,使得 $a=bq$,则称 b 整除 a,或 a 被 b 整除,记作 $b|a$,且称 a 是 b 的倍数,b 是 a 的约数(因数).若 b 不能整除 a,则记作 $b\nmid a$.

2. 性质

(i) 如果 $c|b,b|a$,那么 $c|a$.

(ii) 如果 $c|a,c|b,m,n$ 是整数,那么 $c|ma+nb$.特别地,$m=1,n=\pm1$ 时,$c|a\pm b$.

(iii) 如果 $c|a,c\nmid b,c\nmid a+b$,

(iv) 如果 $b|a,c$ 为整数,那 $b|ac$.

(v) 如果 $b|a,d|c$,那么 $bd|ac$.

(vi) 如果 $a=b+c,d|b,d|c$,那么 $d|a$.

3. 对于一些特殊的数,一个数能否被它整除,从这个数的自身特点就能判断,即整除的数字特性.以下是常见的.

除数	被除数的数字特征
2	个位数为偶数
3(9)	各位数字之和能被 3(或 9)整除
4(25)	后两位数能被 4(或 25)整除
5	个位数字为 0 或 5
8(125)	后三位数字能被 8(或 125)整除
11	奇数位数字的和与偶数位数字的和之差能被 11 整除
7、11、13	末三位数与末三位以前的数的差能被 7 或 11 或 13 整除

4. 当 k 为正整数时,$a-b|a^k-b^k$,$a+b|a^{2k-1}+b^{2k-1}$.

例 题 精 讲

例 1 由 1,2,3,4,5,6 这六个数字组成一个没有重复数字的六位数$\overline{abcdef}$,使得四个三位数$\overline{abc}$,$\overline{bcd}$,$\overline{cde}$,$\overline{def}$依次能被 4,5,3,11 整除.求这个六位数.

分析 (i)由 $5|\overline{bcd}$,知 $d=5$;

(ii)由 $11|\overline{def}$,知 $d+f-e$ 是 11 之倍数,唯有 $d+f=e$,且由 $d=5$ 知 $f=1,e=6$;

(iii)由 $3|\overline{cde}$,

$$c+d+e=c+5+6=11+c,$$

是 3 的倍数,可知 $c=4$;

(iv)由 $4|\overline{abc}b=2$,从而 $a=3$.

综上所述,这六位数为 324561.

例 2 若六位数$\overline{1234xy}$能被 8 和 9 整除,试求 x,y.

分析 依题设,有

$$400+10x+y=8p, \quad ①$$

$$10+x+y=9q. \quad ②$$

其中 p,q 为整数,由于

$$10 \leqslant 10+x+y \leqslant 10+9+9=28,$$

所以 $q=2$ 或 $q=3$.

当 $q=2$ 时,由②得

$$x+y=8, \quad ③$$

③代入①得

$$408+9x=8p,$$

可知 $9x$ 应为 8 的倍数,此时仅有 $x=0$ 或 8,进而有 $y=8$ 或 0.

当 $q=3$ 时,由②得

$$x+y=17. \quad ④$$

④代入①得

$$417 + 9x = 8q.$$

可知 $9x+1$ 应为 8 的倍数. 显然这样的 x 不存在.

综上所述,所求 x, y 分别 0,8 或 8,0.

例 3 证明:当且仅当整数 A 被划去个位数后得到的数加上个位数的 4 倍能被 13 整除时 $13 \mid A$.

证明 设 A 的个位数为 a,划去个位数后所得的数为 k,则 $A = 10k + a$, A 划去个位数后加上个位数的 4 倍所得数为 $A' = k + 4a$.

$$10A' - A = 10k + 40a - 10k - a = 39a.$$

显然,若 $13 \mid A'$,则 $13 \mid A$. 反之,若 $13 \mid A$,则 $13 \mid A'$.

故命题得证.

例 4 由数字 0,1,2,3,4,5 能否组成数字不重复且能被 11 整除的六位数?

解 设 $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ 为 0,1,2,3,4,5 组成的六位数. 因为

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 15$$

为奇数,所以 $A = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6$ 也为奇数. 又 $|A| \leqslant 5 + 4 + 3 - 2 - 1 - 0 = 9$,所以 $11 \nmid A$,从而 $11 \nmid \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$.

例 5 证明:如果 u 和 v 是整数, $u^2 + uv + v^2$ 被 9 整除,那么 u 和 v 都被 8 整除.

证明 依题设,由

$$u^2 + uv + v^2 = (u - v)^2 + 3uv,$$

可被 9 整除,知 $3 \mid (u-v)^2$. 进而有 $3 \mid u - v$. 于是 $9 \mid (u-v)^2$,又有 $3 \mid uv$. 从而 u 与 v 之一被 3 整除,再由 $u - v$ 被 3 整除,可知 u, v 都被 3 整除.

例 6 给定 $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{20} = \frac{m}{n}$,其中 $\frac{m}{n}$ 是不约分数,试证: m 能被 5 整除.

证明 $\frac{m}{n} = (\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20}) + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + \cdots + (\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{19})$.

首先$\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{20}=\frac{5}{12}$,且又于每个 $k=0,1,2,3$,都有

$$\frac{1}{5k+1}+\frac{1}{15k+2}+\frac{1}{5k+3}+\frac{1}{5k+4}$$

$$=\frac{(5k+2)(5k+3)(5k+4)+\cdots+(5k+1)(5k+2)(5k+3)}{(5k+1)(5k+2)(5k+3)(5k+4)}$$

$$=\frac{5l_1+2\cdot 3\cdot 4+5l_2+1\cdot 3\cdot 4+5l_3+1\cdot 2\cdot 4+5l_4+1\cdot 2\cdot 3}{5l_0+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

$$=\frac{5l+50}{5l_0+24}.$$

这里 l_1,l_2,l_3,l_4,l_5 及 l_0 都是自然数,分母 $5l_0+24$ 不能被 5 整除,从而分数在化为不可约分数后,它的分子仍能被 5 整除.

例 7 假设 a,b,c,d 是整数,且数 $ac,bc+ad,bd$ 都被某整数 u 整除,证明:数 bc 和 ad 也都能被 u 整除;

证明 因
$$(bc-ad)^2=(bc+ad)^2-4abcd,$$

故
$$\left(\frac{bc-ad}{u}\right)^2=\left(\frac{bc+ad}{u}\right)^2-4\times\frac{ac}{u}\cdot\frac{bd}{u}. \qquad ①$$

①式右端为整数,故$\frac{bc-ad}{u}$是整数.设 $s=\frac{bc+ad}{u}$, $t=\frac{bc-ad}{u}$,由①知 s,t 的平方差等于偶数,因此,数 s 与 t 或者同为偶数,或者同为奇数,有$\frac{bc}{u}=\frac{s+t}{2}$, $\frac{ad}{u}=\frac{s-t}{2}$都是整数,即数 bc 和 ad 都能被 u 整除.

例 8 绕着圆周写了 1995 个数字(都是 0~9 的自然数),已知从某一位置开始顺时针方向读出这些数字,得到的 1995 位数能被 27 整除,证明:从任何一个位置开始按顺时针方向读出这些数字所得的 1995 位数,都能被 27 整除.

分析 设用 $a_1,a_2,,a_{1995}$表示这 1995 个数字,并设从 a_1 开始按顺时针方向读出的数为 $A=\overline{a_1a_2\cdots a_{1995}}$.

依题意,只需证明当 $27\mid A$ 时,从 a_2 开始按顺时针方向读出的数 $B=\overline{a_2a_3\cdots a_{1995}a_1}$也能被 27 整除,为此,作差

$$
\begin{aligned}
10A - B &= a_1 \times 10^{1995} - a_1 \\
&= (10^{1995} - 1)a_1 \\
&= 9a_1 \times \underbrace{1\cdots1}_{1995个1},
\end{aligned}
$$

因为 $3 \mid 1995$，所以 $3 \mid \underbrace{1\cdots1}_{1995个1}$，从而，有 $27 \mid 10A - B$.

例 9 一天我发现了如下的魔术钱币机：如果我放入一枚一分的硬币，出来一枚 5 分硬币和一枚一角的硬币；如果我放入一枚 5 分硬币，机器给我四角硬币．而如果我放入一枚一角硬币，我取回 3 枚一分硬币．我用一枚一分的硬币开始，反复进行以上过程，出现我刚好有一元硬币的机会吗？验证答案．

解 如果投入机器一枚一分的硬币，我所得净多 14 分，而如果投入一枚 5 分硬币，我所得净多 35 分．另一方面，我如果投入一枚一角硬币，所得将净失去 7 分．既然 14、35 和 7 都是 7 的倍数．由此推知，不管我向机器投入多少次硬币，净增加(或减少)总是 7 的倍数．如果要出现总数为 1 元，净增加将是 99 分，因为 99 不是 7 的倍数，因此要出现这种情况是不可能的，即永远不会刚好有 1 元的硬币．

练 习 十 九

一、填空题

1. 使得 n^3+3 可被 $n+3$ 整除的正整数的和是________.

2. 11 个女孩与 n 个男孩找蘑菇，共找到 n^2+9n-2 个，每个人找到的一样多，则男孩的人数是________.

3. 已知两位数 $\overline{ab}$ 能整除十位数字为零的三位数 $\overline{a0b}$，且 $a<b$，则满足题设要求的 $\overline{ab}$ 有________个.

4. 将自然数 N 接写在每一个自然数的右面，如果得到新数都能被 N 整除，那么称 N 为“魔术数”．小于 130 的自然数中“魔术数”的个数是________.

5. 由 0～5 可以组成不重复的又能被 11 整除的六位数有

________个.

二、解答题

6. 设$\overline{xyz}$是一个三位数,且 $x+y+z=7$,求证:当 $y=z$ 时,$\overline{xyz}$一定能被 7 整除;反之亦然.

7. 若 $4b+2c+d=32$,试问$\overline{abcd}$能否被 8 整除,请说明理由.

8. 试证:n 为整数时,$n(n+1)(2n+1)$为 6 的倍数.

9. 求证:$7\mid(2222^{5555}+5555^{2222})$.

10. 柯楼南契大蛇有 1000 个头,神话中的大力士能一次用剑砍去 1,17,21 或 33 个头,但是大蛇又相应地生出 10,14,0 或 48 个头.问大力士能否战胜柯楼南契大蛇?

11. 一个魔方是由自然数组成的正方形网格,它有如下性质:每一行、每一列及两条对角线上的数的和都相同,这个值称为魔方和,求证:每一个 3×3 大小的魔方的魔方和能被 3 整除.

12. 一群幼儿园的孩子一对跟着一对地排列成两列,在每列中男孩和女孩的数目一样.一男一女组成的对与其余的对(即全由男孩与女孩组成的对)个数一样.求证:这群孩子的总数被 8 整除.

13. 是否存在能被$\underbrace{11\cdots1}_{m个1}$整除且数字和小于 m 的正整数?

第二十讲　素数·合数·算术基本定理

知识点和方法述要

1.正整数依据不同的标准可以有各种分类，这里依据它们的正约数的个数可以分为三类：

(i) 只有一个正约数的数，它只能是1；

(ii) 只有两个正约数的数，如2,3,11，这样的数叫素数(或质数)；

(iii) 有两个以上正约数的数，如4,10,12，这样的数叫合数.

2.(i) 2是最小的素数，也是惟一的偶素数；除2以外，其余的素数都是奇数.

(ii) 素数有无穷多；合数也有无穷多.

证明　假设只有有限多个素数，设为 $p_1,p_2,p_3,\cdots p_n$. 考虑 $p_1p_2\cdots p_{n+1}$，由假设，$p_1p_2\cdots p_n+1$ 是合数，它一定有一个素约数 p，显然，p 不同于 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 这与假设 $p_1,p_2\cdots,p_n$ 为全部素数矛盾.

3.素数可以采用爱拉托斯散筛选法进行判定.如判断2003为素数，可以这样操作：分别用素数2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,41,43来除2003，它们都不能整除2003，而下一个素数47，它的平方 $47^2=2209$ 大于2003，由此就可判定2003为素数.

4.算术基本定理　对于一合数，如果将它分解为若干素数的连乘积形式，并不考虑素因数的排列顺序，那么这种分解式将是惟一的，即正整数 $N(N>1)$ 可以惟一表示为

$$N=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_m^{\alpha_m}.$$

其中 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 为素数，且 $p_1<p_2<\cdots<p_m$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为正整数.

5.对于正整数 N 的素因数标准分解式

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}.$$

根据乘法原理,它的正约数个数为$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_m)$.它的所有约数之和为

$$\begin{aligned} S(N) &= (1+p_1+\cdots+p_1^{\alpha_1})(1+p_2+\cdots+p_2^{\alpha_2}) \\ &\quad \cdots(1+p_m+\cdots+p_m^{\alpha_m}) \\ &= \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} \cdots \frac{p_m^{\alpha_m+1}-1}{p_m-1}. \end{aligned}$$

当且仅当 N 为平方数时,它的正约数个数为奇数.

例 题 精 讲

例 1 已知素数 p 和 q 满足 $3p+5q=31$,求$\frac{p}{3q+1}$的值.

分析 由于 3,5,31 均为奇数,故 p 和 q 必有一偶数,素偶数只有 2 个.

当 $p=2$ 时,$q=5$,这时$\frac{p}{3q+1}=\frac{1}{8}$;

当 $q=2$ 时,$p=7$,这时$\frac{p}{3q+1}=1$.

例 2 证明存在无限多个自然数 a 有下列性质:对于任何自然数 n,$z=n^4+a$ 都不是素数.

分析 合理选择 a,以使 n^4+a 变成两个不小于 2 的因数的积,可取 $a=4m^4(m>1)$,则

$$\begin{aligned} n^4+4m^4 &= (n^4+4m^2n^2+4m^4)-4m^2n^2 \\ &= (n^2+2m^2)^2-4m^2n^2 \\ &= (n^2+2m^2-2mn)(n^2+2m^2+2mn). \end{aligned}$$

因 $n^2+2m^2+2mn>1$,$n^2+2m^2-2mn=(n-m)^2+m^2>m^2$,故 n^4+4m^4 不是素数.取 $a=4\cdot2^4, 4\cdot3^4, \cdots$,就可以得到无限多个合乎要求的 a.

例 3 已知 $p_t = \underbrace{111\cdots1}_{t个1}$ 是素数,求证 t 也是素数.

证明 假设 t 不是素数,则 t 必为 1 或合数.

若 $t=1$,则 $p_1=1$ 不是素数,与已知 p_t 是素数矛盾.

若 t 是合数,设 $t=ab$,其中 a,b 为正整数,且 $1<a<t,1<b<t$,则

$$p_t = \underbrace{1\cdots11}_{t个1} = 10^{t-1}+10^{t-2}+\cdots+10+1$$

$$= \frac{10^t-1}{10-1} = \frac{10^{ab}-1}{9}.$$

因
$$10^{ab}-1 = (10^a)^b - 1$$
$$= (10^a-1)[(10^a)^{b-1}+(10^a)^{b-2}+\cdots+10^a+1],$$

故 10^a-1 是 10^t-1 的约数.又由 $1<a<t$ 知,$1<\frac{10^a-1}{9}<p^t$.于是 p_t 有大于 1 又不等于它本身的约数 $\frac{10^a-1}{9}$,即 p_t 不可能是素数,这与题设矛盾.故 t 是素数.

例 4 互为反序的两个自然数的积是 92565,求这两个互为反序的自然数.

解 分解因子:$92565=3\times3\times5\times11\times11\times17$.互为反序的两个自然数中,若其中之一为 3 的倍数(或 11 的倍数),另一个也必为 3 的倍数(或 11 的倍数),又因乘积是五位数,所以这两个数是三位数,则有

$$92565 = (3\times5\times11)\times(3\times17\times11)$$
$$= 165\times561.$$

故这两个数为 165 和 561.

例 5 给定下表

1	4	7	10	13	…
4	9	14	19	24	…
7	14	21	28	35	…

10	19	28	37	46	…
13	24	35	46	57	…

求证：

(1)若 N 在表中，则 $2N+7$ 不为素数.

(2)若 N 不在表中，则 $2N+7$ 为素数.

证明 由观察知，表中第 m 行、第 n 列处的数为 $n(2m+1)+m-3$.

不妨设 N 在表中第 m 行、第 n 列处，则

$$2N+7=2n(2m+1)+2m-6+7$$
$$=(2m+1)(2n+1).$$

因 $m\geqslant 1, n\geqslant 1$，所以 $2m+1>1, 2n+1>1$，故 $2N+7$ 不为素数. 设 $2N+7=pq, p>1, q>1$，则 p, q 必为正奇数，令 $p=2m+1, q=2n+1$，由 $2N+7=(2m+1)\cdot(2n+1)$ 解得

$$N=n(2m+1)+m-3.$$

显然 N 为表中第 m 行、第 n 列处的数，矛盾. 故 $2N+7$ 为素数.

例 6 若正整数 a 的约数(除 a 本身)之和等于另外一正整数 b，b 的约数之和(除 b 自身)等于 a，则称 a, b 互为亲和数. 证明：284 与 220 是亲和数.

分析 $284=2^2\times 71$，其约数(除自身)之和为

$$(1+2+2^2)(1+71)-284=220.$$

$220=2^2\times 5\times 11$，其约数(除自身)之和为

$$(1+2+2^2)(1+5)(1+11)-220=284.$$

由题设知，284 与 220 为亲和数

例 7 求自然数 N，使它能被 5 和 49 整除，并且包括 1 和 N 在内，它共有 10 个约数.

解 把数 N 写成素因数分解标准形式

$$N=2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_2}\cdot 5^{\alpha_3}\cdot 7^{\alpha_4}\cdot\cdots\cdot p_n^{\alpha_n}\quad(\alpha_k\geqslant 0).$$

由于 N 能被 5 和 $7^2=49$ 整除，故 $\alpha_3\geqslant 1, \alpha_4\geqslant 2$，其余的指数 α_k 为正整数或零，依题意，有

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_n+1)=10.$$

由于 $\alpha_3+1\geqslant2,\alpha_4+1\geqslant3$，且 $10=2\times5$，故

$$\alpha_1+1=\alpha_2+1=\alpha_5+1=\cdots=\alpha_n+1=1,$$

即 $$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_5=\cdots=\alpha_n=0.$$

N 只有两个不同的质因数 5 和 7. 因为 $\alpha_4+1\geqslant3>2$，故由 $(\alpha_3+1)(\alpha_4+1)=10$ 知 $\alpha_3+1=5,\alpha_4+1=2$ 是不可能的，因而 $\alpha_3+1=2$，$\alpha_4+1=5$，得

$$N=5^{2-1}\cdot7^{5-1}=5\times7^4=12005.$$

例 8 如果一个自然数是素数，并且它的数字的位置经过任意变换后仍是素数，则称这个数为绝对素数. 证明：绝对素数不能有多于三个不同的数字.

分析 首先这种绝对素数是存在的，例如 13 和 17 就是两个；其次绝对素数中出现的数字不会有偶数，也不会有数字 5. 因此，倘若某数为绝对素数，则该数至多包括 1,3,7,9 四种数码. 下面我们只须证明包括 1,3,7,9 四种数码的绝对素数不存在.

设 $M_1=\overline{a_1a_2\cdots a_n1379}=\overline{a_1a_2\cdots a_n}\times10^4+1379$，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是取值 1,3,7,9 的数码，我们可以只交换 1379 四个数码的位置构作出 7 个不同的只由 1,3,7,9 四个数码构成的数：

$$M_1=M+1379=M+7\times197+0,$$
$$M_2=M+3179=M+7\times454+1,$$
$$M_3=M+9173=M+7\times1305+2,$$
$$M_4=M+7913=M+7\times1130+3,$$
$$M_5=M+1397=M+7\times199+4,$$
$$M_6=M+3197=M+7\times456+5,$$
$$M_7=M+7139=M+7\times1019+6.$$

设 M 被 7 除余 r，则 $M_1,M_2,M_3,M_4,M_5,M_6,M_7$ 被 7 除所得余数依次为 $r,r+1,r+2,r+3,r+4,r+5,r+6$，其中必有一个被 7 整除，它不是素数，所以用 1,3,7,9 四个数码构成的数不是绝对素数.

因此,一个自然数若是绝对素数,则这个数至多由 1,3,7,9 中三个不同数字所构成.

例 9 是否存在这样的六个连续正整数 $n,n+1,n+2,n+3,n+4,n+5$,把它们任意分成两部分(每部分至少有一个数),使得一部分的所有数之积等于另一部分所有数的乘积.

解 这样的六个连续整数不存在.

如果这六个连续整数存在,把这六个数进行素因数分解,由题设中两个部分各数乘积相等的要求,每个素因数至少在两个数中出现.

由于是六个连续整数,它们的素因数只能是 2,3,5 这三个,且 5 只能在 n 和 $n+5$ 中出现.

于是 $n+1,n+2,n+3,n+4$ 中只有素因数 2 和 3,因为这四个数中一定有两个奇数,这两个连续奇数不可能有素因数 2,而只能有素因数 3,即这两个奇数只能是 3 的幂,这就出现:$3^n-3^m=2$,这是不可能的.所以这样的六个连续整数不可能存在.

练 习 二 十

一、填空题

1. 从 1~100 这一百个自然数有________个质数,有________个合数.

2. 一个两位素数,将它的十位数字与个位数字对调后仍是一个素数,我们称它为"无暇素数",则所有"无暇素数"之和为________.

3. 既是两个素数之和,又是两个素数之差的素数有______个.

4. 有三个素数,使得它们的积是和的 5 倍,则这三个素数的和是________.

5. 对于一个自然数 n,如果能找到自然数 a 和 b,使 $n=a+b+ab$,则称 n 为一个"好数",例如 $3=1+1+1\times1$,即 3 是一个"好数".在 1~100 这 100 个自然数中,"好数"共有________个.

二、解答题

6. 设 a,b,c,d 是正整数,并且 $a^2+b^2=c^2+d^2$,求证:$a+b+c+d$ 一定是合数.

7.(1)哪些素数能写成两个平方数之差?

(2)哪些素数能写成两种(或更多种)不同形式的两平方数之差?

8. 证明:对每个自然数 n,总能找到自然数 m,使 $nm+1$ 是个合数.

9. 若自然数 N 的全部因数之和为 $2N$,则称 N 为完全数.验证:6,28,496 是完全数.

10. 设 m 和 n 为自然数,试问自然数 $m(n+9)(m+2n^2+3)$ 最少有多少个不同的质因数?

11. 有一个小于 2000 四位数,它恰有 14 个约数,其中有一个素因数的末位数是 1,求此四位数.

12. 已知整数 $a,b,a+b,5a+b$ 都是质数,求所有这样的四位数.

13. 在一间屋子里有 100 盏电灯排成一横行,依从左到右的顺序编上号码 1,2,3,…,100.每盏电灯上有一根拉线开关,最初所有电灯全是关的,现有 100 个学生在门外排着队,第一个学生走进屋来,把编号是 1 的倍数的电灯的开关拉一下;接着第二个学生走进屋来,把凡是编号是 2 的倍数的电灯开关拉了一下;…最后第 100 个学生走进屋来,把编号是 100 的倍数的电灯的开关拉了一下,这样做过以后,问哪些电灯是亮的?

第二十一讲　带余除法

知识点和方法述要

1.给定两个正整数 m 与 n，由整数的除法可得 $m=nq+r$，其中 q 是商数，r 是余数($0\leq r<n$).就是说，m 被 n 除时的余数只能为 0，1，2，…，($n-1$)这 n 个数中的一个.

2.按照被 n 除得的余数，我们可以把全体整数分类:余数为 0 的全体整数作第一类，余数为 1 的为第二类，…，余数为 $n-1$ 的作第 n 类，共有 n 个类.这样，每个整数都在某个类中，同一整数不会在两个不同类中出现.

例如取 $n=2$ 便得到大家熟知的奇、偶两大类.

取 $n=3$，因任何整数被 3 除得的余数是 0，1，2 之一，即每个整数都是 $3k$，$3k+1$ 或 $3k+2$ 之一，其中 k 是整数.

同理，每个整数都是 $4k$，$4k+1$，$4k+2$，$4k+3$ 之一，其中 k 是整数.

有些整数问题需要把整数按上面的方式分类来说明.这种方法在应用时.应把每个类都考虑到，不可遗漏.

例题精讲

例 1　1270 除以某自然数，其商为 74，求除数与余数.

分析　设除数为 x，余数为 r，由带余除法有 $1270=74x+r$，且 $0\leq r<x$，于是

$$1270\geqslant 74x, \qquad ①$$

$$1270-74x=r<x, \qquad ②$$

由①，②得　$$\frac{1270}{75}<x\leqslant\frac{1270}{74},$$

即
$$16\frac{14}{15} < x \leqslant 17\frac{6}{37}.$$
所以 $x = 17$, $r = 1270 - 74x = 12$.

例 2 一个自然数除以 8 得到的商加上这个数除以 9 的余数,其和是 13.求满足条件的所有自然数.

分析 设所求自然数为 n,则又可设
$$n = 8a + r = 9b + (13 - a). \qquad ①$$
其中 a, b 为整数,$0 \leqslant r < 8$, $0 \leqslant 13 - a < 9$.

由①得
$$9(a - b) = 13 - r,$$
所以 $9 \mid 13 - r$,唯有 $r = 4$.故满足条件的所有自然数为 $n = 8a + 4(4 < a \leqslant 13)$,即 44,52,60,68,76,84,92,100,108,共 9 个.

例 3 "三三数之剩二,五五数之无剩余,七七数之剩四",求满足条件之最小数.

分析 依题意可设 $M = 7a + 4$,又设 $a = 5b + c(0 \leqslant c \leqslant 5)$.于是
$$\begin{aligned} N &= 7(5b + c) + 4 \\ &= 35b + 7c + 4 \\ &= 5(7b + c) + 2c + 4. \end{aligned}$$
因 $5 \mid N$,故 $5 \mid 2c + 4$.于是 $c = 3$, $N = 35b + 25$.再设 $b = 3d + e(0 \leqslant e < 3)$,则
$$\begin{aligned} N &= 35(3d + e) + 25 \\ &= 3(35d + 11e + 8) + 2e + 1, \end{aligned}$$
依题设知 $2e + 1$ 除以 3 余 2,这里只有 $e = 2$,所以 $N = 105d + 95$.这即为所求符合条件之数.当 $d = 0$ 时,N 取最小值 95.

例 4 从小到大排列着的十个自然数 1,4,8,10,16,19,21,25,30,43 中,相邻若干项之和是 11 的倍数的数组共有多少组?

解 用 $S_i(1 \leqslant i \leqslant 10)$表示前 i 个数的和,那么

$$S_1=1,$$
$$S_2=1+4=5,$$
$$S_3=1+4+8=13,$$
$$S_4=1+4+8+10=23,$$
$$S_5=1+4+8+10+16=39,$$
$$S_6=1+4+8+10+16+19=58,$$
$$S_7=1+4+8+10+16+19+21=79,$$
$$S_8=1+4+8+10+16+19+21+25=104,$$
$$S_9=1+4+8+10+16+19+21+25+30=134,$$
$$S_{10}=1+4+8+10+16+19+21+25+30+43=177,$$

这十个数被 11 除的余数依次为

$$1,5,2,1,6,3,2,5,2,1$$

凡余数相等的两数的差能被 11 整除，它们是

$$S_4-S_1, S_{10}-S_1, S_{10}-S_4, S_7-S_3, S_9-S_3, S_9-S_7, S_8-S_2$$

这些差都是相邻若干项之和，共有 7 组.

例 5 从自然数 1,2,3,…,1989 中，最多可取出多少个数使得所取的数中任意三个数之和能被 18 整除？

解 设 a,b,c,d 是所取的数中的任意四个数，则 $a+b+c=18m, a+b+d=18n$，其中 m,n 是自然数. 于是

$$c-d=18(m-n).$$

上式表示所取出的数中任意两数之差是 18 的倍数，即所取出的每个数除以 18 的余数均相同. 设这个余数为 $r(0\leqslant r<18)$，则 $a=18a_1+r, b=18b_1+r, c=18c_1+r$，其中 a_1,b_1,c_1 是整数. 于是

$$a+b+c=18(a_1+b_1+c_1)+3r.$$

因为 $18\mid(a+b+c)$，所以 $18\mid 3r$，即 $6\mid r$，于是 $r=0,6,12$. 又 $1989=110\times18+9$. 所以，以 1,2,…,1989 中可取 6,24,42,…1986 共 111 个数，它们中的任意三数之和能被 18 整除.

例 6 (1)求能使 2^n-1 被 7 整除的所有正整数 n.

(2)试证:对任何正整数 n,$7\nmid 2^n+1$.

证明 (1)对 $n=3k,3k+1,3k+2$ 三种情况分别讨论.

当 $n=3k$ 时,

$$2^n-1=2^{3k}-1=8^k-1=(8-1)m=7m;$$

当 $n=3k+1$ 时,

$$2^n-1=2^{3k+1}-2+1=2(2^{3k}-1)+1=2\times 7m+1;$$

当 $n=3k+2$ 时,

$$2^n-1=2^{3k+2}-4+3=4\times 7m+3.$$

所以当且仅当 $n=3k$ 时,$7\mid(2^n-1)$.

(2)因 $2^n+1=(2^n-1)+2$,由(1)知:$n=3k,3k+1,3k+2$ 时,2^n+1 被 7 除的余数分别为 2,3,5,所以 $7\nmid 2^n+1$.

例 7 求证:如果 a 和 b 是整数,那么 a,b,a^2+b^2,a^2-b^2 中一定有一个能被 5 整除.

证明 若 a,b 之中有一个能被 5 整除,则命题获证.

若 a,b 之中任何一个都不能被 5 整除,则 a,b 只能形如 $5m\pm1,5m\pm2$.由于

$$(5m\pm1)^2=25m^2\pm10m+1=5(5m^2\pm2m)+1,$$

$$(5m\pm2)^2=25m^2\pm20m+4=5(5m^2\pm4m)+4,$$

于是 a^2,b^2 形如 $5m+1$ 或 $5m+4$.

若 a^2 和 b^2 同形如 $5m+1$ 或 $5m+4$,则 a^2-b^2 能被 5 整除.

若 a^2 和 b^2 一形如 $5m+1$,一形如 $5m+4$,则 a^2+b^2 能被 5 整除.

故 a,b,a^2+b^2,a^2-b^2 中一定有一个能被 5 整除.

例 8 若 N 是一个任意的自然数,求证:总可以有两个四位数 A、B,由 1,9,8,4 这四个数码经过适当排列得到的,使 $N+A$ 与 $N-B$ 都是 7 的倍数.

分析 要使两个整数的差是 7 的倍数,只要这两个数被 7 除的余数相同就行了;要使这两个整数的和是 7 的倍数,只要这两个数被 7 除的余数之和是 0 或 7 就行了.

因为 N 是一个任意的自然数，故它除以 7 的余数可能是 0，1，2，3，4，5，6 中的一个．

为使 $N+A$ 和 $N-B$ 都是 7 的倍数，只要证明 1，9，8，4 这四个数码的各种排列形式的四位数中，除以 7 的余数包括 0，1，2，3，4，5，6，7 这七个数就行了．事实上，

$$1498 = 214 \times 7 + 0,$$
$$1849 = 204 \times 7 + 1,$$
$$1948 = 278 \times 7 + 2,$$
$$1984 = 283 \times 7 + 3,$$
$$1894 = 270 \times 7 + 4,$$
$$1489 = 212 \times 7 + 5,$$
$$9148 = 1306 \times 7 + 6,$$

对于任意的自然数 $N=7m+r(r=0,1,2,3,4,5,6)$，我们可选择除以 7 后余数为 r 的一个为 B，此时 $7|(N-B)$．又当 $r=0$ 时，我们选择 $A=1498$，此时 $N+A$ 是 7 的倍数；而当 $r\neq 0$ 时，我们选择除以 7 后余数为 $(7-r)$ 的数，此时 $N+A$ 是 7 的倍数．

例 9 是否能将正整数 1，2，…，64 分别填入 8×8 的国际象棋盘的 64 个方格内，使得形如图 21－1，方向可任意转置的任意四个格内的数之和能被 5 整除．

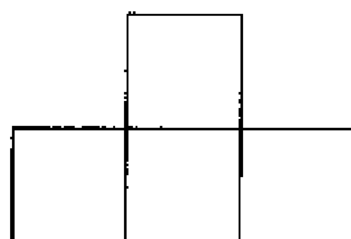


图 21－1

解 不能．假设满足题设的要求的填数方法已经实现，图 21－2 中的 $a,b,c,\cdots$ 是已填好的数字，则由题设知 $5|b+e+f+g$，$5|j+e+f+g$，所以 $5|[(b+e+f+g)-(j+e+f+g)]$，即 $5|b-j$．就是说，b 与 j 被 5 除所得的余数相同．

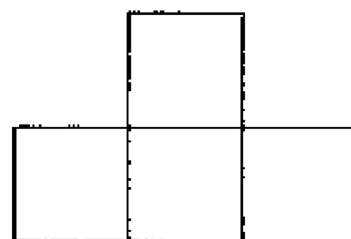


图 21－2

又由题设 $5|g+f+b+j$，$5|b+e+f+g$，所以 $5|j-e$．这就是说，j 与 e 被 5 除得的余数相同．

显然，照此推算下去，棋盘上有一半方格里所填的数被 5 整除所

得的余数都相同.同理可证剩下一半所填的数被5除所得余数也相同.因此所填的所有的数被5除所得的余数只有两种,与余数有0,1,2,3,4五种相矛盾.故满足题设要求的填数方式不存在.

练 习 二 十 一

一、选择题

1.整数x被6除得余数3,则$3x$被6除时余数是　　(　　).

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

2.今天是4月18日,是星期日,从今天算起第1993^3天之后的那一天是　　(　　).

(A)星期五　　(B)星期六

(C)星期日　　(D)星期一

3.把由1开始的自然数依次写下去,直写到第198位为止:

$$\underbrace{1234567891011121314\cdots}_{198位}$$

那么这个数被9除的余数是　　(　　).

(A)4　　(B)6　　(C)7　　(D)非上述答案

4.把1059,1417和2312每个数各除以d,若余数都是r,其中d是大于1的整数,那么$d-r$等于　　(　　).

(A)15　　(B)179　　(C)$d-1$　　(D)$d-15$

5.当P除以D时,商为Q,余数为R.当Q除以D'时,商为Q',余数为R'.当P除以DD'时,余数为　　(　　).

(A)$R+R'D$　　(B)$R'+RD$

(C)RR'　　(D)R

二、解答题

6.说明:大于11的整数都能写成两合数之和.

7.已知a,b是整数,a除以7余2,b除以7余5,当$a^2>3b$时,问a^2-3b除以7余几?

8. 已知 N 除以 4 的余数为 3，求 N 除以 12 的余数.

9. 求证：如果 $p(p\leqslant5)$是 -个底数，那么 p^2-1 能被 24 整除.

10. 一个两位数除以它的反序数所得的商数恰等于余数，则这个两位数是多少?

11. 设 a,b 都是整数，求证：$a,b,a+b,a-b$ 这 4 个数中至少有一个能被 3 整除.

12. 已知正整数 p,q 都是素数，且 $7\beta+q$ 与 $pq+11$ 也是素数. 求$(p^q+q^p)\div(2^p+2^q)$的值.

13. 设 $p>3$，且 p 与 2^n+p 均为素数，求证：$2^{n+1}+p$ 为合数.

第二十二讲　最大公约数与最小公倍数

知 识 点 和 方 法 述 要

1. (1) 设 a_1, a_2 是两个整数. 如果 $d \mid a_1, d \mid a_2$, 那么 d 就称为 a_1 和 a_2 的公约数. 一般地, 设 $a_1, \cdots, a_k$ 是 k 个整数, 如果 $d \mid a_1, \cdots, d \mid a_k$, 那么 d 就称为 $a_1, \cdots, a_k$ 的公约数.

(2) 设 a_1, a_2 是两个不全为零的整数, 那么 a_1, a_2 的公约数中最大的称为 a_1 和 a_2 的最大公约数, 记作 (a_1, a_2). 一般地, 设 $a_1, \cdots, a_k$ 是 k 个不全为零的整数, 那么 $a_1, \cdots, a_k$ 的公约数中最大的称为 $a_1, \cdots, a_k$ 的最大公约数, 记作 $(a_1, \cdots, a_k)$. $a_1, \cdots, a_k$ 的公约数一定是最大公约数的约数.

2. 设 a_1, a_2 是两个均不等于零的整数. 如果 $a_1 \mid l, a_2 \mid l$, 则称 l 是 a_1, a_2 的公倍数. a_1, a_2 的正的公倍数中最小的称为 a_1 与 a_2 的最小公倍数. 一般地, 设 $a_1, \cdots, a_k$ 是 k 个均不等于零的整数. 如果 $a_1 \mid l, \cdots, a_k \mid l$, 则称 l 是 $a_1, \cdots, a_k$ 的公倍数, 其中正的公倍数中最小的称为 $a_1, \cdots, a_k$ 的最小公倍数, 其他公倍数一定是最小的公倍数的倍数.

3. 若将 a, b 进行素因数分解, 并将它们表示成

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m},$$
$$b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_m^{\beta_m}.$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 为素数, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m$ 为非负整数, 且设 t_i, s_i 为 $\alpha_i, \beta_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 中较小者与较大者, 则

$$(a, b) = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_m^{t_m},$$
$$[a, b] = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_m^{s_m}.$$

4. 最大公约数与最小公倍数的重要性质:

(i) 如果 $b \mid a$, 则 $(a, b) = b, [a, b] = a$.

(ii) 对于任意正整数 m, 有

$$(am, bm) = m(a, b);$$
$$[am, bm] = m[a, b].$$

(iii) 若 $a = bq + r(a > b, 0 \leqslant r < b)$，则有$(a, b) = (b, r)$.

这一性质表示求(a, b)可转化为求(b, r). 由于 b 和 r 相对于 a 与 b 来说要小，求(b, r)应较求(a, b)简便. 若 b, r 仍比较大，可重复使用这一性质. 这样一种方法称之为辗转相除法.

(iv) $(a_1, a_2, a_3) = ((a_1, a_2), a_3)$.

(v) $ab = (a, b)[a, b]$.

5. 若$(a_1, a_2) = 1$，则称 a_1, a_2 互素. 若$(a_1, \cdots, a_k) = 1$，则称 $a_1, \cdots, a_k$ 互素.

值得注意的是 k 个数互素，不一定两两互素，如$(6, 9, 10) = 1$，而$(6, 9) = 3$.

6. (i)若$(a, b) = 1$，则$(a, a \pm b) = 1$，$(a \pm b, b) = 1$，$(a \pm b, ab) = 1$；

(ii) 若$(a, b) = 1$，$a \mid bc$，则 $a \mid c$；

(iii) 若$(a, b) = 1$，$a \mid c$，$b \mid c$，则 $ab \mid c$；

(iv) 若$(a, b) = 1$，则$(ac, b) = (c, b)$；

(v) 若$(a, b) = 1$，$c \mid a$，则$(c, b) = 1$.

7. 以下给出求最大公因数与最小公倍数的常有方法. 以求$(1008, 270)$与$[1008, 270]$为例：

解一 （短除法）

$$\begin{array}{r|ll} 2 & 1008 & 270 \\ \hline 3 & 504 & 135 \\ \hline 3 & 168 & 45 \\ \hline & 56 & 15 \end{array}$$

于是
$$(1008, 270) = 2 \times 3 \times 3 = 18,$$
$$[1008, 270] = 2 \times 3 \times 3 \times 56 \times 15 = 15120.$$

短除法施行过程实际上就是不断提取公因数的过程，直至$(56, 15) = 1$为止.

解二 （利用素因数分解）因

$$1008=2^4\times3^2\times7=2^4\times3^2\times5^0\times7^1$$

$$270=2\times3^3\times5^1=2\times3^3\times5^1\times7^0,$$

于是

$$(a,b)=2\times3^2=18,$$

$$[a,b]=2^4\times3^3\times5\times7=15120.$$

解三 （辗转相除法）

$$1008=270\times3+198,$$

$$270=198\times1+72,$$

$$198=72\times2+54,$$

$$72=54\times1+18,$$

$$54=18\times3.$$

为了书写便利，上述过程可采用以下形式：

1008	270	3
810	198	
198	72	2
144	54	
54	18	3
54		
0	18	

也可更简捷地写成以下形式；

$$(1008,270)=(198,270)=(198,72)$$

$$=(54,72)=(54,18)=18,$$

$$[1008,270]=\frac{1008\times72}{18}=15120.$$

例 题 精 讲

例 1 正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}$的和为 1001，$(a_1,a_2,\cdots,a_{10})=d$，求 d 的最大公约数.

解 因 d 是 $a_1,a_2,\cdots a_{10}$ 的最大公约数，故 $d\mid 1001$，即 d 是 $1001=7\times 11\times 13$ 的约数，又 $d\mid a_k(k=1,2,\cdots,10)$，可得 $a_k\geq d$，所以

$$1001=a_1+a_2+\cdots+a_{10}\geq 10d,$$

从而，有 $d\leqslant\frac{1001}{10}<101$. 由此可见，$d$ 至多取值 $7\times 13=91$.

由于 1001 可以写成 10 个数的和：

$$\underbrace{91+91+\cdots+91}_{9个}+182$$

其中每个数都能被 91 整除，所以 d 的最大值为 91.

例 2 如图 22－1，一个圆圈上有 $n(n<100)$ 个孔. 小明像玩跳棋一样，从 A 孔出发，逆时针方向将一枚棋子跳动，每步跨过若干个孔，希望跳一圈后回到 A 孔. 他先每步跳过 2 个孔，结果只能跳到 B 孔；他又试着每步跳过 4 个孔，结果还是跳到 B 孔；最后他每步跳过 6 孔，正好回到 A 孔. 问这个圆圈上一共有多少个孔？

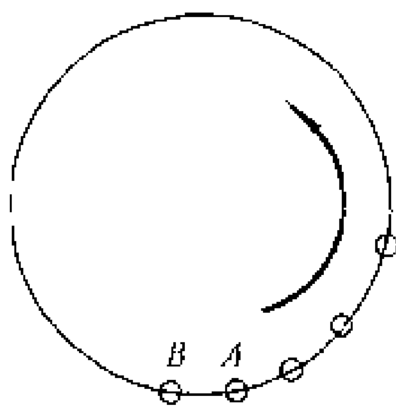


图 22－1

解 依题意，每步跳过 2 孔，连起点一共要跳过 3 个孔，故除掉 B 孔外，圆圈上的孔数是 3 的倍数，有 $3\mid n-1$. 每步跳过 4 孔，连起点一步要跳过 5 个孔，故除掉 B 孔外，圆圈上的孔数是 5 的倍数，因此，有 $5\mid n-1$. 又每步跳过 6 孔时，可回到 A，这表明 $7\mid n$.

因 $(3,5)=1$，故 $15\mid n-1$. 因 $n<100$，故 n 只能可是 16，31，46，61，76，91，其中仅有 91 是 7 的倍数. 故 $n=91$，即圆圈上有 91 个孔.

例 3 已知两正整数之和为 667，它们的最小公倍数除以最大公约数，商等于 120. 求这两个正整数.

解 设所求两数为 $x,y,(x<y)$，则

$$\begin{cases} x+y=667, & ①\\ [x,y]=120(x,y). & ② \end{cases}$$

设 $(x,y)=d$，$x=md$，$y=nd$，则 $(m,n)=1$，$m<n$. 由①，②得

$$(m+n)d=667, \qquad ③$$

$$mnd = 120d. \qquad ④$$

由④得 $$mn = 120. \qquad ⑤$$

因 $667 = = 23 \times 29, 120 = 2^3 \times 3 \times 5$，且注意到 $d \neq 1$，故有以下两种情形：

(i) 若 $d = 23$，则

$$\begin{cases} m + n = 29, \\ mn = 120. \end{cases}$$

唯有 $m = 5, n = 24$.

(ii) 若 $d = 29$，则

$$\begin{cases} m + n = 23, \\ mn = 120. \end{cases}$$

唯有 $m = 8, n = 15$.

所求两数 $5 \times 23, 24 \times 23$ 或 $8 \times 29, 15 \times 29$，即 115，552 或 232，435.

例 4 求三个不同的正整数 a, b, c，使它们满足

$$\frac{11}{a} + \frac{11}{b} + \frac{11}{c} = \frac{143}{210}, \qquad ①$$

且使 $[a, b, c]$ 最小.

解 ①可变为

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{13}{210}. \qquad ②$$

注意到 $(13, 210) = 1$，由③可见 $[a, b, c] \geqslant 210$. 又

$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7,$$

$$13 = 1 + 2 + 10 = 1 + 5 + 7 = 2 + 5 + 6,$$

因此，$[a, b, c]$ 的最小值为 210. 此时 a, b, c 的取值可为 210，105，21；或 210，42，30；或 105，42，35.

例 5 证明：对任意的整数 n，分数 $\frac{65n + 12}{39n + 7}$ 是既约分数.

证一 假设存在 $d > 1$，使得 $d \mid 65n + 12, d \mid 39n + 7$，则

$$39(65n + 12) - 65(38n + 7) = 13,$$

也可被 d 整除,故 $d=13$. 但 $13\nmid 39n+7$,矛盾. 故 $(65n+12,39n+7)=1$,分数 $\frac{65n+12}{39n+7}$ 是即约分数.

证二 $(65n+12,39n+7)=(26n+5,39n+7)=(26n+5,13n+2)=(1,13n+2)=1$.

证三 因

$$3(65n+12)-5(39n+7)=1,$$

所以 $(65n+12,39n+7)=1$,分数 $\frac{65n+12}{39n+7}$ 是既约分数.

例 6 已知两个正整数的和是 45,它们的最小公倍数是 168,求这两个数.

解 设两数分别为 $x,y(x<y)$,$(x,y)=d$,则有 $x=md$,$y=nd$,$(m,n)=1$. 依题设可得

$$\begin{cases}(m+n)d=45, & ①\\ md\cdot nd=168d. & ②\end{cases}$$

①÷②得

$$\frac{m+n}{mn}=\frac{15}{56}.$$

因 $(m,n)=1$,故

$$(m,n)=(m,m+n)=(n,m+n)=(mn,m+n)=1.$$

于是,有

$$\begin{cases}m+n=15,\\ mn=56.\end{cases}$$

可得 $m=7$,$n=8$,进而有 $d=3$. 所以 $x=2$,$y=24$.

例 7 试求出所有的正整数 a,b,c,其中 $1<a<b<c$,使得 $abc-1$ 能被 $(a-1)(b-1)(c-1)$ 整除.

解 设 $x=a-1$,$y=b-1$,$z=c-1$,则 $1\leqslant x<y<z$,且

$$\begin{aligned}&(x+1)(y+1)(z+1)-1\\=&\ xyz+xy+yz+zx+x+y+z\end{aligned}$$

可被 xyz 整除,即 $xyz\mid xy+yz+zx+x+y+z$.

注意到

$$xy + yz + zx + x + y + z < 3yz.$$

所以 $x=1$ 或 2.

当 $x=1$ 时，$yz \mid 1+2y+2z$，而 $1+2y-2z<4z$，$1+2y+2z$ 为奇数，所以 $y=3$，于是 $3z \mid 7+2z$，可得 $z=7$.

当 $x=2$ 时，$2yz \mid 2+3y+2z+yz$，可知 y,z 均为偶数. 设 $y=2y_1$，$z=2z_1$ 则

$$4yz_1 \leqslant 1+3y_1+3z_1+2y_1z_1 < 6z_1+2y_1z_1.$$

可得 $y_1<3$. 又 $y>x$，故 $y_1=2$，$y=4$. 再由 $8z_1 \mid 7+7z_1$ 得 $z_1=7$. 于是 $z=14$.

综上所述，所求正整数 a、b，c 分别为 3,5,15 或 2,4,8.

例 8 设 p,q 是正整数，满足

$$\frac{p}{q}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319},$$

求证：$1979 \mid p$.

证明
$$\begin{aligned}\frac{p}{q}&=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1319})-2(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1318})\\&=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1319})-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{659})\\&=\frac{1}{660}+\frac{1}{661}+\cdots+\frac{1}{1318}\\&=(\frac{1}{660}+\frac{1}{1319})+(\frac{1}{661}+\frac{1}{1318})+\cdots+(\frac{1}{989}+\frac{1}{990})\\&=1979\cdot(\frac{1}{660\times1319}+\frac{1}{661\times1318}+\cdots+\frac{1}{998\times990}).\end{aligned}$$

于是
$$1319!\ \frac{p}{q}=1979m \quad (m\text{ 为整数})$$

说明 $1979 \mid 1319!\ p$. 因 $(1979,1319!)=1$，所以 $1979 \mid p$.

例 9 对正整数 x,y，用 (x,y) 表示一个数对，这里还规定当 $x \neq y$ 时，(x,y) 与 (y,x) 是不同的，例如 $(1,2)$ 与 $(2,1)$ 代表不同数对. 如果正整数 x,y 的最小正倍数为 30，求这样的数对的个数.

解 因 x,y 的最小公倍数为 30. 所以 x,y 均为 $30(=2\times3\times5)$ 的约数.

(i) 若 $x=30$ 时, y 可以是 30 的任一约数, 根据乘法原理这样的 y 有

$$(1+1)(1+1)(1+1)=8(\text{个}).$$

故这样的数对有 8 个.

(ii) 若 x 为 30 的二个素因数的积, 这样的 x 有 3 个, 每一个 x 对应的 y 为 30 的余下的一个素因数与 x 的约数的乘积, 这样的 y 有.

$$(1+1)(1+1)=4(\text{个}).$$

因此, 不同的数对 (x,y) 有

$$3\times4=12(\text{个}).$$

(iii) 若 x 为 30 的素因数, 这样的 x 有 3 个, 每一个 x 对应的 y 为 30 的余下两素因数的积成 30, 这样的 y 有

$$3\times2=6(\text{个}).$$

因此, 这样的数对 (x,y) 有 6 个.

(iv) 若 $x=1$, 其对应的 y 只能是 30, 这时数对 (x,y) 有 1 个.

综上所述, 满足题设要求的数对有

$$8+12+6+1=27(\text{个}).$$

练习二十二

一、填空题

1. 设 a,b 为正整数, $a>b$, $p=(a,b)$, $q=[a,b]$, 则 p,q,a,b 依次用 $<$, $\leqslant$ 连接为______.

2. 若 $(x,y)=60$, $(y,z)=90$, $[z,x]=360$, 则 $x+z=$______.

3. 若 $d\mid 19n+14$, $d\mid 10n+3$, n, d 均为正整数, 则 $d=$______.

4. 把 $1,2,\cdots,19$ 分成 m 个组, 使得有 2 个数以上的各组中任意

两个数的最小公倍数不在同一组，则 m 的最小值是________.

5. 把一块长 357cm，宽 105cm，高 84cm 的长方体木块锯成若干个大小相同的正方体木块，要求正方体体积最大，且没有剩余的碎木块（损耗不计），所锯成的正方体木块的边长是________.

6. 在黑板上写两个不同的自然数，擦去较大数，换成这两个数的差，称为一次变换. 比如(15,40)→(15,25). 对得到的两个数仍然可以继续作这种变换，直到两个数变得相同为止，对$(1024,\underbrace{11\cdots1}_{20\text{个}1})$作这样的变换最后得到的两个相同的数是________.

7. 有一些四位数，它与 9 的差能被 9 整除，它与 8 的差能被 8 整除，它与 7 的差能被 7 整除，它与 6 的差能被 6 整除，这样的数有________.

8. 若正整数 n 与 24 的最大公约数为 4，与 24 的最小公倍数为 168，则 $n=$________.

二、解答题

9. 已知$(a,b)=1$，证明：$a+b$ 与 a^2+b^2 的最大公约数为 1 或 2.

10. 已知 x,y,z 均为整数，且 $11\mid(7x+2y-5z)$，求证：$11\mid(3x-7y+12z)$.

11. 六位数$\overline{81ab93}$是 99 的倍数，求数码 a、b.

12. 若 n 为小于 50 的正整数，$(4n+5,7n+6)\neq1$，求 n.

13. 设 M 为 $1,2,\cdots,n$ 的最小公倍数，如 $M_1=1$，$M_2=2$，$M_3=6$，$M_4=12$，…. 对什么样的 n，有 $M_{n-1}=M_n(n\geqslant2)$？证明你的结论.

练习解答

练习一

1. $3(2k+1)$.

2. 个位数字为 $a-1$，这个两位数为 $10a+(a-1)$.

3. $a^2-(\frac{3}{4}b)^3$.

4. $2+0.5(p-1)$

5. 甲、乙两队每天分别完成整个工程的 $\frac{1}{x}$，$\frac{1}{y}$．a 天共完成 $a(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})$，剩下的工程是整个工程的 $1-a(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})$.

6. 93 年粮食产量为 a，94 年粮食产量为 $a(1+p\%)$，95 年粮食产量为 $a(1+p\%)(1+p\%)$．故选(B).

7. 甲的速度为 a 千米/时，乙的速度为 $1.2a$ 千米/时，乙从 A 到 B 的时间是 $\frac{m}{1.2a}$ 小时．选(B)

8. 经验证，(C)正确.

9. 混合溶液含盐 $(m\cdot a\%+n\cdot b\%)$ 千克，故浓度为 $\frac{m\cdot a\%+n\cdot b\%}{m+n}\cdot 100\%=\frac{ma+nb}{m+n}\%$．选(D).

10. **解** (1)船顺水速度为 $(x+2)$ 千米/时，逆水速度为 $(x-2)$ 千米/时，往返所用时间为 $\left(\frac{40}{x+2}+\frac{40}{x-2}\right)$ 小时，故平均速度为 $\frac{40\times 2}{\frac{40}{x+2}+\frac{40}{x-2}}$ 千米/时.

(2) 当 $x=6$ 时，平均速度为

$$\frac{40\times 2}{\frac{40}{6+2}+\frac{40}{6-2}}=\frac{80}{5+10}=5\frac{1}{3}\text{(千米/时)}.$$

11. **解** $14(a-b)+\frac{13}{2}a+\frac{5}{2}b=14(a-b)+\frac{7}{2}(a-b)+3(a+2b)=\frac{35}{2}(a-b)+3(a+2b)=\frac{35}{2}\times\frac{22}{7}+3\times\frac{22}{3}=55+22=77$.

12. 解　$S_{阴影}=\frac{1}{2}\pi(\frac{a}{2})^2-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{8}\pi a^2=\frac{1}{8}\pi a^2-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{8}\pi a^2=\frac{1}{4}\pi a^2-\frac{1}{2}a^2$.

当 $a=10\text{cm}$ 时,

$S_{阴影}=\frac{1}{4}\times3.14\times100-\frac{1}{2}\times100=78.5-50=28.5(\text{cm}^2)$.

13.解　记 $a=\underbrace{11\cdots1}_{2000个1}$,则

$\underbrace{11\cdots1}_{2000个1}\underbrace{22\cdots2}_{2000个2}=\underbrace{11\cdots1}_{2000个1}\underbrace{00\cdots0}_{2000个2}+\underbrace{22\cdots2}_{2000个1}$

$=a(1\underbrace{00\cdots0}_{2000个0}+2)=a(\underbrace{99\cdots9}_{2000个9}+3)=a(9a+3)$

$=(3a)\cdot(3a+1)$.

所以,可确定$\underbrace{11\cdots1}_{2000个}\underbrace{22\cdots2}_{2000个}$是两个连续自然数的积.

练习二

1. $a=0,b\neq0$.选(D).

2. 因 $b<0$,故 $b<0<-b,a+b<a<a-b$.选(C).

3. 选(C).

4. $(-\frac{1}{2})^3=-\frac{1}{8},-\frac{1}{2}<-\frac{1}{8}$.选(D).

5. 因 $0<a<1$,故$|-\frac{1}{a}|=|\frac{1}{a}|=\frac{1}{a}>1$,所以,$-\frac{1}{a}<-1<-a<0<a<1<\frac{1}{a}$.

6. $a\div\frac{1994}{1995}=a\times\frac{1995}{1994}=a+\frac{a}{1994}<a+\frac{1993}{1994}<a+\frac{1994}{1995}$. $a\times\frac{1994}{1995}=a(1-\frac{1}{1995})=a-\frac{a}{1995}>a-\frac{1993}{1995}>a-\frac{1994}{1995}$.故数值最大的是 $a+\frac{1994}{1995}$,数值最小的是 $a-\frac{1994}{1995}$,它们的和是 $2a$.

7. 因为$|x-y|\geqslant0$,所以 $y-x\geqslant0,y\geqslant x$.由$|x|=3,|y|=2$可知,$x<0$,即 $x=-3$.

(i) 当 $y=2,x+y=-1$;

(ii) 当 $y=-2,x+y=-5$.

所以 $x+y$ 的值为 -1 或 -5.

8. 在 -109.2 与 -11.9 之间包含最小整数是 -109,最大整数是 -12,共计包含 $(-12)-(-109)+1=98$ 个整数,在 10.5 与 199.5 之间共计包含 $199-11+1=189$ 个整数.因此,墨水共盖住 $98+189=287$ 个整数.

9. 因 $|x|\leqslant 1$,故 $2|x|\leqslant 2$.又 $|y|\leqslant 1$,所以 $|y+1|+|2y-x-4|=|y+1|+|4+x-2y|=y+1+4+x-2y=5+x-y\geqslant 5+(-1)-1=3$.当 $x=-1,y=1$ 时所求得最小值 3.

10. 因 $|b|+b=0$,故 $b\leqslant 0$.而 $|c|-c=0$,有 $c\geqslant 0$.又 $b|b|=3|c|=4|d|=6$,有 $|b|=1$, $|c|=2$, $|2d|=3$.故 $b=-1$, $c=2$.于是

$|2a-3b|-|3b-2a|+|2b-c|-2|d|=|2\times(-1)-2|-3=4-3=1$.

11. **解** 设 K_0 点所表示的有理数为 x,则 $K_1,K_2,K_3,\cdots,K_{100}$ 点所表示的有理数分别为:$x-1$, $x-1+2$, $x-1+2-3$, $\cdots$, $x-1+2-3+4-\cdots-99+100$.根据题意,得

$$x-1+2-3+4-\cdots-99+100=19.94.$$

于是 $x=19.94-50=-30.06$.

答:K_0 点所表示的数为 -30.06.

12. **解** 因 $\frac{3.85}{2.57}=\frac{385}{257}=1+\frac{128}{257}=1\frac{1}{2}-\frac{1}{257}$, $\frac{1534}{1023}=1\frac{1}{2}-\frac{1}{1023}$, $\frac{487}{325}=1\frac{1}{2}-\frac{1}{325}$, $\frac{267}{178}=1\frac{1}{2}-\frac{1}{325}$, $\frac{267}{178}=1\frac{1}{2}$,故 $\frac{3.85}{2.57}<\frac{487}{325}<\frac{1534}{1023}<\frac{267}{178}$,进而,有 $-\frac{267}{178}<-\frac{1534}{1023}<-\frac{487}{325}<-\frac{3.85}{2.57}$.

13. **解** 因 $abc<0$, $a+b+c>0$,故 a,b,c 中有且仅有一个负数,$x=1$.所以 $x^{19}-92x+2=-89$.

14. **解**(1)原式

$=\left(\frac{17}{39}-\frac{16}{117}\right)^2\times\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\right)^3-\left[2\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\times 24-\frac{1}{6}\times 24+\frac{3}{4}\times 24\right]\div(4-9)$

$=0-[2\frac{1}{2}-9-4+18]\div(-5)$

$=-(\frac{5}{2}+5)\times(-\frac{1}{5})=\frac{15}{2}\times\frac{1}{5}=1\frac{1}{2}$.

(2) 原式 $=33\frac{1}{3}\times\frac{49}{4}+[-1+7+\frac{25}{4}]\times 46\frac{2}{3}$

$=33\frac{1}{3}\times\frac{49}{4}+\frac{49}{4}\times 46\frac{2}{3}$

$$=(33\frac{1}{3}+46\frac{2}{3})\times\frac{49}{4}$$
$$=980.$$

(3) 原式 $=\dfrac{(\frac{4}{9}-\frac{5}{3}+1)\times 3}{3-\frac{1}{3}}\times\dfrac{10}{13}$

$$=\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{8}{3}}\times\frac{10}{13}=-\frac{5}{26}.$$

15. **解** 设两个有理数分别为$\frac{a}{b}$,$\frac{c}{d}$,其中 a,b,c,d 是整数,且 $b\neq 0,d\neq 0$. 因

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd},$$

$ad+bc$,bd 均为整数,且 $bd\neq 0$,故$\frac{ad+bc}{bd}$为有理数,所以$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$仍为有理数.

练习三

1. 原式 $=(1-3)+(5-7)+\cdots+(997-999)+1001=(-2)\times 500+1001=1$.

2. 原式 $=(125\times 8)\cdot(6\times\frac{5}{3})=1000\times 10=10000$.

3. 原式 $=1989\times 1990\times 10001-1990\times 1989\times 10001=0$.

4. 原式 $=|||(1993-1992)-1994|-1995|-1996|$
$=||(1994-1993+1992)-1995|-1996|$
$=|1995-(1994-1993+1992)-1996|$
$=1996-1995+1994-1993+1992$
$=1994.$

5. 原式 $=\frac{3}{4}+(\frac{1}{5}+\frac{4}{5})+(\frac{1}{6}+\frac{5}{6})+(\frac{1}{7}+\frac{6}{7})+(\frac{1}{8}+\frac{7}{8})+(\frac{1}{9}+\frac{8}{9})-\frac{1}{10}=\frac{3}{4}+5-\frac{1}{10}=5\frac{13}{20}$.

6. 原式 $=(\frac{175}{9}+\frac{175}{19})\div(-\frac{25}{9}-\frac{25}{19})=175\times(\frac{1}{9}+\frac{1}{19})\div[-25(\frac{1}{9}+\frac{1}{19})]$

$= -175 \div 25 = -7.$

7. 原式 $= 3 \times 4 \times 5 + 2 \times 4 \times 5 + \ \times 2 \times 3 \times 5 + 2 \times 3 \times 4$

$= 60 + 40 + 30 + 24 = 154.$

8. 原式 $= (\frac{37}{36} - \frac{13}{24} + \frac{17}{18}) \times \frac{8}{7} \times \frac{18}{11}$

$= \frac{37 \times 4}{77} - \frac{13 \times 6}{77} + \frac{17 \times 8}{77}$

$= \frac{148 - 78 + 136}{77}$

$= \frac{206}{77} = 2\frac{52}{77}.$

9. 原式 $= 2 - (2-1) \times 2^2 - (2-1) \times 2^3 - \cdots - (2-1) \times 2^{19} + 2^{20}$

$= 2 - (2^3 - 2^2) - (2^4 - 2^3) - \cdots - (2^{20} - 2^{19}) + 2^{20}$

$= 2 + 2^2 = 6.$

10. 去掉 10,9.6,计算各数与 9.8 的差,并把每个数扩大 100 倍,有

$$-10, 5, 13, -20, 0, 10, 5, -3,$$

相加为 0,故它们的平均数为 0. 该运动员得 9.8 分.

11. **解** 原式 $= \frac{1 \times 3 + 1}{1 \times 3} \cdot \frac{2 \times 4 + 1}{2 \times 4} \cdot \frac{3 \times 5 + 1}{3 \times 5} \cdots \frac{98 \times 100 + 1}{98 \times 100} \cdot \frac{99 \times 101 + 1}{99 \times 101}$

$= \frac{2^2}{1 \times 3} \cdot \frac{3^2}{2 \times 4} \cdot \frac{4^2}{3 \times 5} \cdots \frac{99^2}{98 \times 100} \cdot \frac{100^2}{99 \times 101}$

$= \frac{2 \times 100}{1 \times 101} = 1\frac{99}{101}.$

12. **解** 原式 $= 1 + \frac{1}{\frac{(1+2) \times 2}{2}} + \frac{1}{\frac{(1+3) \times 3}{2}} + \cdots + \frac{1}{\frac{(1+10) \times 10}{2}}$

$= 1 + \frac{2}{2 \times 3} + \frac{2}{2 \times 4} + \cdots + \frac{2}{10 \times 11}$

$= 1 + 2[(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \cdots + (\frac{1}{10} - \frac{1}{11})]$

$= 1 + 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{11})$

$= 1 + 1 - \frac{2}{11}$

$= 1\frac{9}{11}.$

13. **解** 原式 $= 1 - [(1 - \frac{1}{1+2}) + (\frac{1}{1+2} - \frac{1}{1+2+3}) + \cdots (\frac{1}{1+2+\cdots+9} -$

$$\frac{1}{1+2+\cdots+10})]$$

$$=\frac{1}{1+2+\cdots+10}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}\times(1+10)\times10}$$

$$=\frac{1}{55}.$$

14. **解** 记 $S=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{5}{8}-\frac{7}{16}+\cdots+\frac{17}{512}$.

即 $$S=\frac{1}{2}-\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}-\frac{7}{2^4}+\cdots+\frac{17}{2^9}.$$

则 $$-\frac{1}{2}S=-\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}-\frac{5}{2^4}+\frac{7}{2^5}-\cdots+\frac{15}{2^9}-\frac{17}{2^{10}},$$

相减得 $$\frac{3}{2}S=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^8}+\frac{17}{2^{10}}.$$

于是 $$(-\frac{3}{4})S=-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}\cdots+\frac{1}{2^8}-\frac{1}{2^9}-\frac{17}{2^{11}}.$$

上面两式再相减得

$$\frac{9}{4}S=\frac{1}{2^2}+\frac{17}{2^{10}}+\frac{1}{2^9}+\frac{17}{2^{11}}=\frac{1}{4}+\frac{55}{2^{11}}.$$

所以 $S=\frac{567}{4608}$.

练习四

1. $1\oplus(-2)=1^3-(-2)^3=9$.

2. $(-\frac{1}{2})\triangle(-\frac{1}{3})=\dfrac{(-\frac{1}{2})^2-(-\frac{1}{3})^2}{(-\frac{1}{2})^2+(-\frac{1}{3})^2}=\dfrac{\frac{1}{4}-\frac{1}{9}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}}=\frac{5}{13}$.

3. $\frac{1}{2}\odot\frac{1}{5}=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}}=\frac{7}{9}.(\frac{1}{2}\odot\frac{1}{5})\odot\frac{1}{8}=\frac{7}{9}\odot\frac{1}{8}=\dfrac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{9}\times\frac{1}{8}}=\dfrac{\frac{65}{72}}{\frac{65}{72}}$
$=1$.

4. $a*b$ 的结果为第 a 行、第 b 行交叉处方格内的数，$2*4=3$，$1*3=3$，$(2*4)*(1*3)=3*3=4$.

5. $6 \otimes 8 = 6 \times 8 - 1 = 47$, $6 \oplus 8 = 6 + 8 - 1 = 15$, $(6 \otimes 8) \oplus (6 \oplus 8) = 47 + 15 - 1 = 61$.

二、解答题

6. **解** $(a \circ b) \circ c = a \circ c = a$, $a \circ (b \circ c) = a \circ b = a$. 故运算∘满足结合律.

$a \circ b = a$, $b \circ a = b$, 故 $a \neq b$ 时, $a \circ b \neq b \circ a$. 运算∘不满足交换律.

7. **解** (1) $a * b = 2ab = 2ba = b * a$.

(2) $(a * b) * c = (2ab) * c = 4abc$;

$$a * (b * c) = a * (2bc) = 2a \cdot 2bc = 4abc.$$

所以 $$(a * b) * c = a * (b * c).$$

(3) 因 $\frac{1}{2} * a = 2 \times \frac{a}{2} = a$. $a * \frac{1}{2} = \frac{1}{2} * a$, 所以 $\frac{1}{2} * a = a * \frac{1}{2} = a$.

8. **解** 依题意,有

$$a * b = 2(a + 2ab + b) = 1994.$$

所以 $$4ab + 2a + 2b = 1994.$$

注意到 $$(2a + 1)(2b + 1) = 4ab + 2a + 2b + 1,$$

所以 $$(2a + 1)(2b + 1) = 1995.$$

又 $2a + 1$, $2b + 1$ 都是不小于 3 的自然数, $1995 = 3^3 \times 5 \times 7$, 含有 16 个约数(包括自身和 1), 故 $2a + 1$ 只能等于 1995 中的 14 个约数. 有序对 (a, b) 共有 14 对.

9. **解** (1) 在(ⅱ)中令 $y = 0$, 并利用(i)得

$$1 * z = 1 + z. \quad ①$$

(2) 由(ⅱ)得 $$(1 * y) * 1 = (1 * y) + 1.$$

由①得 $$(y + 1) * 1 = (y + 1) + 1,$$

再用 $x - 1$ 代替 y, 有

$$1 * x = x + 1. \quad ②$$

由①、②知 $1 * x = x * 1$.

10. **解** 取 $x = y + 1$, 由(ⅰ)有

$$(2y + 1)(y + 1) * y = (y + 1)^2 * y^2. \quad ①$$

由(ⅰ),(ⅱ)知

$$(y + 1) * y = 1 * 0 = 1.$$

由(ⅲ)知

$$(y + 1)^2 * y^2 = ((y + 1)^2 - y^2) * 0 = (2y + 1) * 0. \quad ②$$

②代入①得

$$2y+1=(2y+1)*0.$$

注意到 y 可取任何有理数，故对任意有理数 m，有 $m*0=m$. 所以

$$a*b=(a-b)*0=a-b.$$

练习五

1. $\frac{3}{a}$ 中分母含有字母. 选(D).

2. $6x^2y+\frac{1}{z}$ 不是整式. 选(A).

3. $x-y=-3$，原式 $=-4(x-y)-3(x-y)+5=-7(x-y)+5=-7\times(-3)+5=26$. 选(D).

4. 因 $3x^{m+1}y^5$ 与 $-mx^4y^{n+3}$ 是同类项，故 $4=m+1$，$n+3=5$，即 $m=-3$，$n=2$. 它们的和是 0.

5. $(x^2-3kxy-3y^2)-(8-\frac{1}{3}xy)=x^2-(3k-\frac{1}{3})xy-3y^2-8$. 由 $3k-\frac{1}{3}=0$ 得 $k=\frac{1}{9}$.

6. $(-3)^3x+(-3)y-81=10$，即 $3^3x+3y=-91$. 于是 $3^3x+3y-81=-91-81=-172$.

7. **解** 多项式为 $5x^2-2x+4-(2x^2-3x+7)=5x^2-2x+4-2x^2+3x-7=3x^2+x-3$. 正确答案为 $(3x^2+x-3)-(2x^2-3x+7)=3x^2+x-3-2x^2+3x-7=x^2+4x-10$.

8. **解** 原式 $=3A-2A+B+4A-4B=5A-3B=5(x^2-2xy+y^2)-3(2x^2-6xy+3y^2)=5x^2-10xy+5y^2-6x^2+18xy-9y^2=-x^2+8xy-4y^2$.

因 $|x|=5$，故 x 可能为 ±5；而 $y^2=9$，故 y 可能是 ±3. 又 $x+y=-2$，唯有 $x=-5$，$y=3$. 所以，原式 $=-(-5)^2+8\times(-5)\times3-4\times3^2=-181$.

9. **解** (1) 原式 $=a^4+3ab-6a^2b^2-3ab^2+4ab+6a^2b^2-7a^2b^2+ab^2-2a^4+b^4=-a^4-7a^2b^2+7ab-2ab^2+b^4$. 当 $a=-2$，$b=1$ 时，原式 $=-(-2)^4-7\times(-2)^2\times1^2+7\times(-2)\times1-2\times(-2)\times1^2+1^4=-53$.

(2) 原式 $=10(2a+b)^2-9(2a+b)$. 当 $a=-\frac{3}{4}$，$b=\frac{1}{2}$ 时，$2a+b=2\times(-\frac{3}{4})+\frac{1}{2}=-1$，原式 $=10\times(-1)^2-9\times(-1)=19$.

10. **解** 当 $a \geqslant b$ 时，$\frac{1}{2}(|a-b|+a+b)=a$；当 $a<b$ 时，$\frac{1}{2}(|a-b|+a+b)=b$. 可见，任意一组值代入代数式后计算的结果等于 a,b 中较大的一个. 为了使 50 个值的和最大，可把 51，52，…，100 分在 50 个不同的组里，所求的最大值就是它们的和

$$51+52+\cdots+100=\frac{1}{2}(51+100)\times 50=3775.$$

练习六

1. 原方程可变为 $\frac{3}{4}x-2\frac{1}{2}=\frac{10}{4}(\frac{3}{8}+\frac{1}{8})$，化简得 $\frac{3}{4}x=\frac{15}{4}$，解得 $x=5$.

2. 原方程可变为 $2000x-2000=\pm 2000$，故 $x=0$ 或 2.

3. 方程 $19x-a=0$ 的解是 $\frac{a}{19}$，故 $\frac{a}{19}=19-a$，解得 $a=18.05$.

4. 原方程可变 $(2a-3)x=a-2$. 依题设，$2a-3=0$ 且 $a-2\neq 0$，故 $a=\frac{3}{2}$.

5. 方程 $3(x+2)=5x$ 可变为 $2x=6$，解得 $x=3$. 方程 $4x-3(a-x)=6x-7(a-x)$ 可变为 $2x=4(a-x)$，即 $2a=3x$，$a=\frac{3x}{2}$. 将 $x=3$ 代入得 $a=\frac{3\times 3}{2}=4\frac{1}{2}$.

6. **解** 原方程可变为 $x-\frac{1}{4}+\frac{3x}{8}-\frac{2}{3}+\frac{x}{12}=2+\frac{35x}{24}$. 即 $(1+\frac{3}{8}+\frac{1}{12}-\frac{35}{24})x=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+2$，化简得 $0\cdot x=2\frac{11}{12}$. 方程无解.

7. **解** 原方程可变为 $1-\frac{1+\frac{1}{2}(1-x)}{3}=4$，得 $1+\frac{1}{2}(1-x)=-9$，$\frac{1}{2}(1-x)=-10$，解得 $x=21$.

8. **解** 原方程可变为 $\frac{10x-10}{3}-2x=\frac{10x+20}{5}$，即 $\frac{10x-10}{3}=4x+4$，$10x-10=12x+12$. 解得 $x=-11$.

9. **解** 将 $x=-2$ 代入方程 $\frac{1}{3}mx=5x+(-2)^2$ 得 $\frac{1}{3}m\times(-2)=5\times(-2)+(-2)^2$，$-\frac{2}{3}m=-6$. 解得 $m=9$. 因此，$(m^2-11m+17)^{2001}=(9^2-11\times 9+$

$17)^{2001}=(-1)^{2001}=-1$.

10. **解** 原方程可变为$(m+1)(m-1)x=(m-2)(m-1)$. 当$m\neq\pm1$时，方程有惟一解$x=\frac{m-2}{m+1}$；当$m=1$时，原方程变为$0\cdot x=0$，x可为任意有理数；当$m=-1$时，原方程变为$0\cdot x=6$，方程无解.

11. **解** 原方程可变为

$$2x\left(\frac{a}{abc+ab+a}+\frac{ab}{abc+ab+a}+\frac{abc}{a^2bc+abc+ab}\right)=1,$$

即 $$2x\left(\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{ab+a+1}+\frac{1}{a+1+ab}\right)=1.$$

所以 $2x=1,x=\frac{1}{2}$.

练习七

1. **解** 设共需x小时完成，依题意，有

$$\frac{x}{5}+\frac{1}{7.5}=1.$$

解得$x=4\frac{1}{3}$. 故需4小时20分钟完成.

2. **解** 设这架飞机最远飞出x千米就应返回. 依题意，有

$$\frac{x}{950}+\frac{x}{850}=4,$$

解得$x=1794$(千米)，即为所求.

3. **解** 设乙队原有x人，则甲队原有$(\frac{2}{3}x+28)$人. 依题意，有

$$2(x-20)=\frac{2}{3}x+28+20.$$

解得$x=66$. 甲、乙两队原来各有72人和66人.

4. **解** 设进货价为x，则下降后的进货价为$0.92x$. 由于售出价不变，故

$$x(1+p\%)=0.92x[1+(10+p)\%]$$

约去x，可得

$$1+0.01\times p=0.92[1+0.01(10+p)].$$

解得$p=15$. 原利润为15%.

5. **解** 设丢番图去世时为x岁. 依题意，有

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x.$$

解得 $x=84$. 所以,他结婚的年龄为 $\frac{84}{6}+\frac{84}{12}=21$(岁);他开始当爸爸的年龄为:$21+\frac{84}{7}+5=38$(岁);他儿子死时他的年龄为:$38+\frac{84}{2}=80$(岁);他去世时的年龄为 84 岁.

6. **解** 设租用 60 座的客车需 x 辆,那么租用 45 座的客车需 $(x+1)$ 辆. 依题意,有

$$60x=45(x+1)+15.$$

解得 $x=4$. 若租用 60 座的客车需费用 $300\times4=1200$(元);若租用 45 座的客车需费用 $250\times(4+1)=1250$(元). 租 60 座的客车较合算.

7. **解** 设倒入含酒精 85% 的酒 x 克,则混合溶液重 $(800+x)$ 克. 依题意,有

$$\frac{75}{100}(800+x)=\frac{50}{100}\times800+\frac{85}{100}x.$$

解得 $x=2000$. 即需倒入浓度为 85% 的酒 2000 克.

8. **解** 设 10 点 34 分后 x 秒汽车追上行人. 行人的速度为 $12\frac{2}{9}-30\times\frac{1000}{3600}=\frac{35}{9}$(米/秒). 依题意,有

$$30\times\frac{1000}{3600}(x-3600-20\times60)-\frac{35}{9}x=800\times2,$$

解得 $x=9360$. 9360 秒 = 2 小时 36 分, $10\frac{34}{60}+2\frac{36}{60}=13\frac{10}{60}$(小时).

答 下午 1 点 10 分汽车追上行人.

9. **解** 设有 x 个工人,并把一个工人一天的工作量作为 1 个单位. 依题意,有

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{4}=2\left(\frac{x}{4}+1\right).$$

解得 $x=8$. 这个农场有 8 个工人.

10. **解** 设参赛选手的总人数为 x,则钓到 3 条或更多条鱼的人数为

$$x-(9+5+7)=x-21,$$

钓到 12 条或更少的人数为

$$x-(5+2+1)=x-8.$$

依题意,有

$$6(x-21)+2\times 7+1\times 5=5(x-8)+13\times 5+14\times 2+15\times 1.$$

化简得

$$6x-107=5x+68.$$

解得 $x=175$.

本次比赛钓到的鱼的总数为

$$6\times 175-107=943(\text{条}).$$

练习八

1. 将 $x=2,y=3$ 代入方程组,整理得

$$\begin{cases}2a-3b=0,\\2a+b=-1.\end{cases}$$

解得 $a=-\frac{3}{8},b=-\frac{1}{4}$,故 $a+b=-\frac{5}{8}$.

2. 由方程组可得 $x=z=\frac{1}{2}y$,故 $x:y:z=1:2:1$.

3. 将各个方程依次记为①,②,③,则①+②+③得 $x+y+z=9$④.将①+④得 $x=7$,②+④得 $y=5$,于是 $z=-3$,所以 $\begin{cases}x=7,\\y=5,\\z=-3.\end{cases}$

4. 若 $x<0$,则由 $|x|+x+y=10$,可得 $y=10$.再由 $x+|y|-y=12$,得 $x=12$,矛盾.所以 $x\geqslant 0$,同理 $y\leqslant 0$.原方程可变为

$$2x+y=0,$$
$$x-2y=12.$$

解得 $x=\frac{32}{5},y=-\frac{14}{5}$.故 $x+y=3\frac{3}{5}$.

5. **解** 化简得 $\begin{cases}3a+2b=14,\\5a-4b=-6,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\b=4.\end{cases}$

6. **解** 原方程组可变为

$$\begin{cases}\dfrac{5x-(1-11y)}{8}=\dfrac{3x+4y+7}{6},\\[2ex]\dfrac{5y-6x+2}{9}=\dfrac{3x+4y+7}{6}.\end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases}3x+17y=31,\\21x+2y=-17.\end{cases}$$

解得$\begin{cases}x=-1,\\y=2.\end{cases}$

7. **解** 将方程依次记为①,②,③. 设 $2x+y=m$, $y-x=n$,由①,②可得

$$\begin{cases}3m+5n=10,\\m+5n=0.\end{cases}$$

解得 $m=5$, $n=-1$. 即$\begin{cases}2x+y=5,\\y-x=1.\end{cases}$解之,得$\begin{cases}x=2,\\y=1.\end{cases}$ 将$\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$代入③得 $z=-1$. 所以$\begin{cases}x=2,\\y=1,\\z=-1.\end{cases}$

8. **解** 取 $a=1$,原方程变为 $3y+3=0$,得 $y=-1$. 取 $a=-2$,原方程变为 $-3x+9=0$,得 $x=3$. 将$\begin{cases}x=3\\y=-1\end{cases}$代入原方程的左边,有

$$\begin{aligned}&(a-1)\times 3+(a+2)(-1)+5-2a\\=&3a-3-a-2+5-2a\\=&0.\end{aligned}$$

这说明,对于 a 为任意值,$\begin{cases}x=3\\y=-1\end{cases}$都是原方程的解.

9. **解** 各方程依次记为①,②,③,④,⑤.

①+②得 $x+u=3$, ⑥

②+③得 $y+v=5$, ⑦

③+①得 $z+x=7$, ⑧

④+⑤得 $u+v=9$. ⑨

又①+②+③+④+⑤得 $x+y+z+u+v=15$. ⑩

⑩-⑥-⑦得 $z=7$. 把 $z=7$ 代入⑧得 $x=0$,把 $x=0$ 代入⑥得 $u=3$,把 $u=3$ 代入⑨得 $y=6$. 把 $y=6$ 代入⑦得 $v=-1$. 故

$$\begin{cases}x=0,\\y=6,\\z=7,\\u=3,\\v=-1\end{cases}$$

为原方程组的解.

10. **解** 将 $x=-y$ 代入方程组得

$$\begin{cases} y = m - 4, & ① \\ -3y = 3m + 2\dfrac{1}{2}. & ② \end{cases}$$

①×3+③得　　$3(m-4)+3m+2\frac{1}{2}=0.$

解得 $m=1\frac{7}{12}$.

练习九

1. **解**　设用 x 立方米木料制作桌面，y 立方米木料制作桌腿. 依题意，有

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ 4 \times 50x = 300y. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x = 3, \\ y = 2. \end{cases}$　$50 \times 3 = 150$(张).

答　3 立方米木料做桌面，2 立方米木料做桌腿. 恰好配成方桌 150 张.

2. **解**　设火车的速度为 v 米/秒，火车全长为 l 米，依题意得

$$\begin{cases} 42v = l + 68, \\ 34v = e - 44. \end{cases}$$

消去 l，得 $v = 14$.

$$14 \times 3600 \div 1000 = 50.4(\text{千米/时})$$

答　火车的速度为 50.4 千米/时.

3. **解**　设安排加工甲种部件 x 人、乙种部件 y 人、丙种部件 z 人，使加工后的甲种部件个数是丙种部件个数的 3 倍，乙种部件个数是丙种部件个数的 2 倍. 依题意，有

$$\begin{cases} x + y + z = 86, \\ 15x = 3 \times 9z, \\ 12y = 2 \times 9z. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x = 36, \\ y = 30, \\ z = 20. \end{cases}$

答　应安排 36 人加工甲种部件，30 人加工乙种部件，20 人加工丙种部件.

4. **解**　设甲种合金重 x 千克、乙种合金重 y 千克、丙种合金重 z 千克. 依题意，得

$$\begin{cases}\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{8}z=5.5,\\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}z=8,\\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y+\frac{5}{8}z=9.5.\end{cases}$$

解得$\begin{cases}x=9,\\ y=6,\\ z=8.\end{cases}$

答　甲种合金重 9 千克、乙种含金重 6 千克,丙种合金重 8 千克.

5. **解**　设甲、乙、丙容器里各有水 x,y,z 升,依题意,有

$$\begin{cases}x-\frac{1}{3}x+\frac{1}{10}\left[z+\frac{1}{4}\left(y+\frac{1}{3}x\right)\right]=9,\\ \frac{3}{4}\left(y+\frac{1}{3}x\right)=9,\\ \frac{9}{10}\left[z+\frac{1}{4}\left(y+\frac{1}{3}x\right)\right]=9.\end{cases}$$

化简得　$\begin{cases}x+3y=36,\\ x+3y+12z=120,\\ 27x+4z+y=360.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=12,\\ y=8,\\ z=7.\end{cases}$

答　甲、乙、丙容器里分别有水 12 升,8 升,7 升.

6. **解**　分两种情况讨论:

(ⅰ) 若 C 在 A、B 两地之间,设 $AB=x$,$BC=y$,,则

$$x-y=10,$$

$$\frac{x}{7.5+2.5}+\frac{y}{7.5-2.5}=4$$

解得$\begin{cases}x=20,\\ y=10.\end{cases}$

(ⅱ) 若 C 在 A 的上游,设 $AB=x$,$BC=y$,则

$$\begin{cases}y-x=10,\\ \frac{x}{7.5-2.5}+\frac{y}{7.5-2.5}=4.\end{cases}$$

解得$\begin{cases} x=6\dfrac{2}{3}, \\ y=18\dfrac{2}{3}. \end{cases}$

答　若 C 在 A、B 两地之间，A、B 两地相距 20 千米；若 C 在 A 的上游，A、B 两地相距 $6\dfrac{2}{3}$ 千米.

7. **解**　设甲种食盐水重量为 $40k$，含盐量为 $2m$，含水量为 n，则乙种食盐水重量为 $77k$，含盐量为 $3m$，含水量为 $2n$. 于是

$$\begin{cases} 2m+n=40k, \\ 3m+2n=77k. \end{cases}$$

解得 $m=3k$. 这说明甲种食盐水 $40k$ 中含盐 $6k$，其浓度为$\dfrac{6}{40}=5\%$.

答　甲种食盐水的浓度为 15%.

8. **解**　设原来盐水的浓度为 $x\%$，原来盐水重 a 千克，"一杯水"重 b 千克. 依题意，得

$$\begin{cases} a\cdot x\%=(a+b)\cdot 20\%, & ① \\ a\cdot x\%+b=(a+2b)\cdot 33\dfrac{1}{3}\%. & ② \end{cases}$$

①－②得　　$a=4b$.

将 $a=4b$ 代入①得　$x\%=\dfrac{1}{4}=25\%$.

答　原来盐水的浓度为 25%.

9. **解**　设买鸡蛋、鸭蛋、鹅蛋各一个分别需要 x,y,z 元. 依题意，得

$$\begin{cases} 13x+5y+9z=12.7, \\ 2x+4y+3z=4.7. \end{cases}$$

可变为

$$\begin{cases} 5y+9z=12.7-13x, \\ 4y+3z=4.7-2x. \end{cases}$$

可求得$\begin{cases} y=0.2+x, \\ z=1.3-2x. \end{cases}$相加即得 $x+y+z=1.5$(元).

答　买鸡蛋、鸭蛋、鹅蛋各一个共需 1.5 元.

10. **解**　设甲、乙、丙产品所改变的件数分别为 x,y,z，恰好将库存的三种零件都用完，于是需要零件为 A:$2x+2z$(件)，B:$2x+y$(件)，C:$y+z$(件). 依题意，得

$$\begin{cases}2x+2z=2p+2r+2, & ①\\ 2x+y=2p+q+1, & ②\\ y+z=q+r. & ③\end{cases}$$

①+②+③得

$$3z=3r+1.$$

即 $z=r+\frac{1}{3}$.这说明,不论怎样改变各种产品件数,需使库存零件用完,丙种产品不能取到整数,故不可能将库存的零件都恰好用完.

练习十

1. 由 $x+y<y$ 知 $x<0$,由 $x-y<x$ 知 $y>0$.故 $y>x$.选(C).

2. 由方程$\frac{2x+a}{3}=\frac{4x+b}{5}$解得 $x=\frac{5a-3b}{2}$.依题意,得 $5a-3b\geqslant0$,即 $5a\geqslant 3b$.选(D).

3. 因不等式组$\begin{cases}x\geqslant m\\ x\leqslant n\end{cases}$无解,故 $m>n$, $-m<-n$, $2-m<2-n$,不等式组$\begin{cases}x>2-m\\ x<2-n\end{cases}$的解集为 $2-m<x<2-n$.选(C).

4. 依题意,有 $3-2m<0$,即 $m>\frac{3}{2}$.选(B).

二、填空题

5. 原不等式组可化为$\begin{cases}x<2,\\ x<-a.\end{cases}$依题意,$-a>2$,即 $a<-2$.

6. 原不等式可变为　$5-t\geqslant4+t$,故 $t\leqslant\frac{1}{2}$.

7. 由原不等组得 $7y<4y+20<8y$, 解得 $5<y<\frac{20}{3}$,于是整数 $y=6$.进而有 $x=44$.所求整数解为$\begin{cases}x=44,\\ y=6.\end{cases}$

8. 解方程可得 $x=-10$.于是 $y<(-10)+9=-1$.因$\frac{1}{\pi}<\frac{10}{31}$,故$\frac{y}{\pi}>\frac{10}{31}y$.

9. **解**　原不等式可变为

$$\frac{3-10x}{2}-\frac{10x-1}{5}<\frac{1}{5},$$

$$5(3-10x)-2(10x-1)<2.$$

化简得
$$-70x<-15,$$

解得 $x>\frac{3}{14}$.

10. **解** 原不等式组可变为

$$\begin{cases}3<2x-5<9,\\1-x<8(2x-3),\\8(2x-3)<11x,\\6(x+5)-4\geqslant 12x-9.\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}4<x<7,\\x>\frac{25}{17},\\x<\frac{24}{5},\\x\leqslant\frac{35}{6}.\end{cases}$$

故 $4<x<\frac{24}{5}$.

11. **解** 原不等式可化为

$$\begin{cases}x>3a+2,\\x>3.\end{cases}$$

(ⅰ) 当 $3a+2>3$,即 $a>\frac{1}{3}$ 时,不等式组的解集为 $x>3a+2$;

(ⅱ) 当 $3a+2\leqslant 3$,即 $a\leqslant\frac{1}{3}$ 时,不等式组的解集为 $x>3$.

12. **解** 原不等式可能为

$$\begin{cases}x\leqslant -3,\\|-(x+3)+(x-3)|>3.\end{cases}\quad(\text{Ⅰ})$$

或
$$\begin{cases}-3<x\leqslant 3,\\|(x+3)+(x-3)|>3;\end{cases}\quad(\text{Ⅱ})$$

或
$$\begin{cases}x>3,\\|(x+3)-(x-3)|>3.\end{cases}\quad(\text{Ⅲ})$$

由(Ⅰ)得$\begin{cases}x\leqslant -3,\\|-6|>3,\end{cases}$ 故 $x\leqslant -3$.

由(Ⅱ)得$\begin{cases}-3<x\leqslant 3,\\|2x|>3.\end{cases}$ 解得 $-3<x<-\frac{3}{2}$ 或 $\frac{3}{2}<x\leqslant 3$.

由(Ⅲ)得$\begin{cases}x>3,\\|6|>3.\end{cases}$故 $x>3$.

综上所述,原不等式的解为 $x<-\frac{3}{2}$或 $x>\frac{3}{2}$.

13. **解** 由不等式$(2a-b)x+a-5b>0$可得

$$(2a-b)x>5b-a. \qquad ①$$

依题意,①与

$$-7x>-10 \qquad ②$$

同解.可设

$$\begin{cases}2a-b=-7k,\\5b-a=-10k.\end{cases} \quad (k>0).$$

解得 $b=-3k,a=-5k$.于是 $ax>b$ 即$(-5k)x>-3k$,所以 $x<\frac{3}{5}$.

14. **解** 由$\begin{cases}3x+2y-z=4,\\2x-y+2z=6.\end{cases}$可得$\begin{cases}x=\frac{1}{7}(16-3z),①\\y=\frac{1}{7}(8z-10).②\end{cases}$ 于是

$$\frac{1}{7}(16-3z)+\frac{1}{7}(8z-10)+z<7.$$

解得 $z<\frac{43}{12}$.因是正整数,故 $z=1,2,3$. 把 $z=1,2$ 代入①、②,所得 x,y 均不是正整数. 当 $z=3$ 时,$x=1,y=2$.所以,$\begin{cases}x=1\\y=2\\z=3\end{cases}$为所求正整数解.

练习十一

1. **解** 设甲、乙两地距离为 s 千米,依题意,有

$$3<\frac{s}{5}<3\frac{1}{6},$$

解得 $15<s<15\frac{5}{6}$.

答 甲、乙两地距离在 15 千米与 $15\frac{5}{6}$千米之间.

2. **解** 设最多可买 x 本笔记本,则买圆珠笔 $12-x$ 支.依题意,得

$$0.94x+(12-x)\times 0.76\leqslant 10.$$

解得 $x \leqslant 4\frac{8}{9}$. x 取不超过 $4\frac{8}{9}$ 的最大整数 4.

答　最多可买 4 本笔记本.

3. **解**　设甲走了 x 条边后与乙同走一条边上. 这段时间内乙走了 $x \cdot \frac{50}{65} = \frac{10x}{13}$ 条边. 因甲在乙后面追赶乙,故有

$$\left(2 + \frac{10}{13}x\right) - x \leqslant 1,$$

解得 $x \geqslant 4\frac{1}{3}$. 因 x 为整数. 故 $x = 5$.

甲走完 5 条边所用时间为

$$\frac{60 \times 5}{65} = 4\frac{8}{13}(\text{分钟}).$$

答　$4\frac{8}{13}$ 分钟后,甲、乙两人可第一次走在同一条边上.

4. **解**　设这堆球在数出 50 个之后,每次 8 个的数还数了 x 次. 依题意,得

$$49 + 7x \geqslant (50 + 80) \times 90\%.$$

解得 $x \leqslant 20$.

这堆球的总数至多是

$$50 + 8 \times 20 = 210.$$

答　这堆球的数目最少只能有 210 个.

5. **解**　设需 x 辆车,依题意,有

$$2x \leqslant 10 \leqslant 3x.$$

故 $\frac{10}{3} \leqslant x \leqslant 5$. x 为 4 或 5. 但 $x = 4$ 不合要求,如有 13 只箱子. 每只重 $\frac{10}{3}$ 吨,由于 $\frac{10}{3} \times 3 < 3$, $\frac{10}{3} \times 4 > 3$,故每辆车只能运走 3 只箱子,4 辆车不能运走全部箱子. 所以需 5 辆车.

6. **解**　设有鸡 x 只,鸡笼 y 个,则

$$\begin{cases} x = 4y + 1, & ① \\ x \leqslant 5(y - 1). & ② \end{cases}$$

由①得 $y = \frac{x-1}{4}$ 代入②得

$$x \leqslant 5\left(\frac{x-1}{4} - 1\right).$$

解此不等式,得 $x\geqslant 25$,进而 $y\geqslant 6$.

答　至少有25只鸡,6个鸡笼.

7. **解**　设丙得 x 块糖,则乙得 $(x+13)$ 块糖,甲得 $2(x+13)$ 块糖. 依题意,得

$$2(x+13)+(x+13)+x<50.$$

解得 $x<\frac{11}{4}$. 因为 x 是正整数,所以 $x=1$ 或 $x=2$. 当 $x=1$ 时,糖为43块;当 $x=2$ 时,糖47块. 又由总块数的数字之和为11,知糖块的总块数为47块. 综上所述,甲得糖30块,乙得糖15块,丙得糖2块.

8. **解**　设小王和他的弟弟的年龄分别是 x,y 岁. 依题意,得

$$\begin{cases}2x+5y=97, & ①\\ y<x<20. & ②\end{cases}$$

由①得　　$x=\frac{1}{2}(97-5y)$.　　③

③代入②得

$$y<\frac{1}{2}(97-5y)<20.$$

解得 $11\frac{2}{5}<y<13\frac{6}{7}$.

为使①成立,注意到 x 为正整数,y 应为奇数,所以 $y=13$. 再由①得 $x=16$.

答　小王的年龄是16岁,他的弟弟是13岁.

9. **解**　设土地被分成若干个边长为 s 米的正方形,则有正整数 m,n,使得 $24=ms$,$52=ns$. 因此,$\frac{m}{n}=\frac{6}{13}$. 设 $m=6k$,$n=13k$(k 为正整数). 依题意,得

$$(m-1)\times 52+(n-1)\times 24\leqslant 1997,$$

即

$$(6k-1)\times 52+(13k-1)\times 24\leqslant 1997.$$

解得 $k\leqslant\frac{1997+76}{624}=3.32\cdots$. 欲使土地分成小正方形试验田最多,应取 $k=3$. 此时正方形的总数为

$$mn=(6\times 3)\times(13\times 3)=702.$$

答　最多可将土地分成702块正方形试验田.

10. **解**　设 A、B、C、D 四校的选手人数分别为 x,y,z,u. 依题意有

$$\begin{cases} x+y=16, & ① \\ y+z=20, & ② \\ z+u=34. & ③ \end{cases}$$

由①,②可知,$x+y<y+z$,所以 $x<z$. 又由于人数的多少是按 A、B、C、D 四校的顺序选派的,所以有 $x<y<z<u$.

由①与 $x<y$ 得 $16-y=x<y$,所以 $y>8$. 由②与 $y<z$ 得 $20-y=z>y$,有 $y<10$,于是 $8<y<10$,可得 $y=9$(因为人数是整数). 将 $y=9$ 代人①,②可知 $x=7, z=11$,再由③有 $u=23$.

故 A 校 7 人,B 校 9 人,C 校 11 人,D 校 23 人.

练习十二

1. $25\frac{1}{3}\times 25\frac{2}{3}=(25\frac{1}{2}-\frac{1}{6})(25\frac{1}{2}+\frac{1}{6})=(25+\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{6})^2=625+25+\frac{1}{4}-\frac{1}{36}=650\frac{2}{9}$.

2. 原式 $=\frac{1}{9}(10^5-1)^2=\frac{1}{9}\times(10^{10}-2\times 10^5+1)=\frac{1}{9}\times 9999800001=1111088889$.

3. $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)[(x+y)^2-3xy]=3\times[3^2-3\times(-2)]=45$.

4. 原式 $=a(a-b)+b(b-c)+c(c-a)=-2a+5b-3c=-2(a-b)+3(b-c)=4+3\times 5=19$.

5. $2^8+2^{10}+2^n=(2^4)^2+2\cdot 2\cdot 2^4\cdot 2^5+2^n$ 为完全平方数,则 $2^n=(2^5)^2=2^{10}$. 故 $n=10$.

6. **解** (1)原式 $=[x+(2y-z)][x-(2y-z)]-(x+2y+z)^2$

$$\begin{aligned}&=x^2-(2y-z)^2-[x^2+2x(2y+z)+(2y+z)^2]\\&=x^2-(2y-z)^2-(2y+z)^2-x^2-4xy-2xz\\&=-8y^2-2z^2-4xy-2xz.\end{aligned}$$

(2) 原式 $=(\frac{5}{2}a^2y+\frac{2}{5}ay^2)[(\frac{5}{2}a^2y)^2+(\frac{5}{2}ay^2)^2-a^3y^2]$

$$\begin{aligned}&=(\frac{5}{2}a^2y)^3-(\frac{2}{5}ay^2)^3\\&=\frac{125}{8}a^6y^3-\frac{8}{125}a^3y^6.\end{aligned}$$

7. **解**　原方程组化简整理得

$$\begin{cases} x+y=-1, \\ 5x-y=-11. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x=-2, \\ y=1. \end{cases}$

8. **解**　$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z$

$=a(z-y)+b(x-z)+c(y-x)$

$=a(3c-3b)+b(3a-3c)+c(3b-3a)$

$=0.$

9. **解**　(1)

$$\begin{array}{r} 1-1+0+1-1+1+0-1+1 \\ \times)\quad 1\quad 1\quad 1 \\ \hline 1-1+0+1-1+1+0-1+1 \\ 1-1+0+1-1+1+0-1+1\quad \\ 1-1+0+1-1+1+0-1+1\qquad \\ \hline 1+0+0+0+0+1+0+0+0+0+1 \end{array}$$

原式 $=x^{10}+x^5y^5+y^{10}$.

(2) x^8 的系数 $=2\times2+(-3)\times(-1)+(-7)\times3=-14$.

10. **解**　(1)令 $n=19901995$,则

原式 $=\dfrac{1995}{n^2-(n-1)(n+1)}=\dfrac{1995}{n^2-(n^2-1)}=1995.$

(2) 令 $a=1999$,则

原式 $=\dfrac{(a^6+a^5+a^4+a^3+a^2+a+1)(a-1)+1}{a^7}$

$=\dfrac{(a^7-1)+1}{a^7}=1.$

11. **解**　设 $x=b+c-2a, y=c+a-2b, z=a+b-2c$,则　$x+y+z=0$.

原式 $=x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0.$

12. **解**　将等式展开,得

$abp^2+acp^2+abq^2+bcq^2+acr^2+bcr^2$

$=2abpq+2acpr+2pcqr$,

即 $ab(p^2-2pq+q^2)+ac(p^2-2pr+r^2)+bc(q^2-2qr+r^2)=0$,

$ab(p-q)^2+ac(p-r)^2+bc(q-r)^2=0$.

因为 a,b,c 都是正数,故

$$ab(p-q)^2=ac(p-r)^2=bc(q-r)^2=0$$

进而,有 $p-q=p-r=q-r=0$,即 $p=q=r$.

当 $p=q=r$ 时,题设等式显然恒成立.

由上述知 $p=q=r$ 为所求.

练习十三

1. $\frac{2^n\cdot7^n\cdot3^n}{(-4^2)^n}=\frac{(2\times7\times3)^n}{(-1)^n\cdot4^2}=-1$.

2. $a^{3m-2n}=\frac{a^{3m}}{a^{2n}}=\frac{(a^m)^3}{(a^n)^2}=\frac{5^3}{4^2}=7\frac{13}{16}$.

3. $15a^{m+1}b^{n+2}C^4\div(-3a^mb^{n+2}C)=-5ac^3$.

4. 原式 $=(\frac{7}{8})^2\div(\frac{7}{8})^2-1-(-5^3)=125$.

5. 依题意,得 $2m^2-3m-1=0$,则 $8m^4-24m^3+20m^2-3m=(2m^2-3m-1)(4m^2-6m+3)+3=3$.

6. $P=\frac{9^9\cdot11^9}{9^{99}}=\frac{11^9}{9^{90}}=Q$.选(B).

7. 设 $x^3-2x^2+px+q=(x-2)(x+2)g(x)+2x+1$,$g(x)$为整式.取 $x=2,-2$,有

$$\begin{cases}2^3-2\times2^2+2+q=2x2+1,\\(-2)^2-2\times(-2)^2-2p+q=2\times(-2)+1.\end{cases}$$

解得 $p=-2,q=9$.选(B).

8. $x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})^3-3x\cdot\frac{1}{x}(x+\frac{1}{x})=3^3-3\times3=18$.

$$x^4+\frac{1}{x^4}=(x^2+\frac{1}{x^2})^2-2=[(x+\frac{1}{x})^2-2]^2-2=(3^2-2)^2=47.$$

故原式 $=(18+7)\div(47+3)=\frac{1}{2}$.选(B).

9. **解**

$$
\begin{array}{rr}
 & \frac{1}{3}-\frac{7}{9} \\
\hline
3-2+1\big) & 1-3-1-1 \\
-\ ) & 1-\frac{2}{3}-\frac{1}{3} \\
\hline
 & -\frac{7}{3}-\frac{4}{3}-1 \\
 & -\frac{7}{3}+\frac{14}{9}-\frac{7}{9} \\
\hline
 & -\frac{26}{9}-\frac{2}{9}.
\end{array}
$$

所求的商为$\frac{1}{3}x-\frac{7}{9}$,余式为$-\frac{2}{9}$.

10. **解** $(y+z-2x)^2+(z+x-2y)^2+(x+y-2z)^2$

$=[(y-x)+(z-x)]^2+[(x-y)+(z-y)]^2+[(x-z)+(y-z)]^2$

$=2(y-x)^2+2(z-x)^2+2(y-z)^2+2(y-x)(z-x)+2(x-y)(z-y)+2(x-z)(y-z)$

$=(y-z)^2+(x-y)^2+(z-x)^2.$

化简得 $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0.$

故 $x=y=z$,则原式$=1$.

11. **解** 设 $x^3+ax^2+bx+c=(x+1)(x-1)q(x)$,$q(x)$为多项式.则

$$1^3+a\times1^2+b\times1+c=0, \quad ①$$

$$(-1)^3+a\times(-1)^2+\ -1)+c=0. \quad ②$$

又设 $x^3-ax^2+bx+c=(x-2)\cdot g(x)+3$,$g(x)$为多项式.

则 $$2^3+a\times2^2+b\times2+c=3. \quad ③$$

由①,②,③解得 $a=-1,b=-1,c=1$.

12. **解** 设 $ax^3-9x^2+bx+c=(x^2+x)g(x)$,$g(x)$为多项式.取 $x=-1,0$,

可得 $$c=0, \quad ①$$

$$-a-9-b+c=0. \quad ②$$

又设 $$ax^3-9x^2+bx+c=(2x+1)q(x)+r, \quad ③$$

$$ax^3-9x^2+bx+c=(x-2)h(x)+r. \quad ④$$

其中 $q(x)$,$h(x)$为多项式.

在③中取 $x=\frac{1}{2}$,得

$$-\frac{a}{8}-\frac{9}{4}-\frac{b}{2}+c=r. \quad ⑤$$

在④中取 $x=2$,得

$$8a-36+2b+c=r. \quad ⑥$$

由①,②,⑤,⑥可解得 $a=10, b=-19, c=0$.

练习十四

1. $AC=\frac{1}{4}AB=3\text{cm}, CM=\frac{1}{2}CB=4.5\text{cm}$,故 $AM=7.5\text{cm}$.选(C).

2. 由 $\alpha+\beta=180°, \alpha-\frac{1}{2}\beta=30°$,解得 $\alpha=80°, \beta=100°$.选(C).

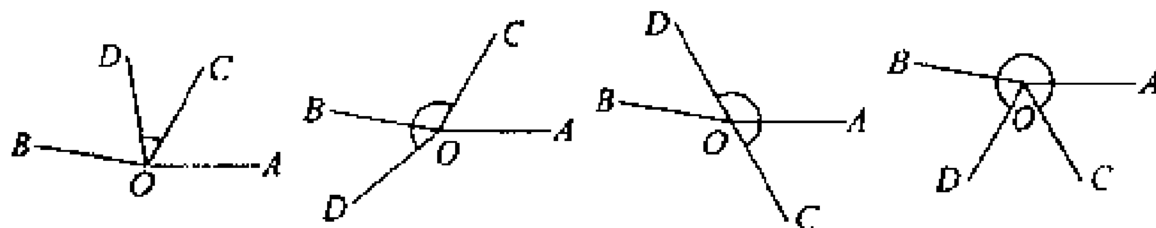
3. 设$\angle AOB=\alpha, \angle BOC=\beta$,则$\angle AOP=\frac{1}{2}(\alpha+\beta), \angle MON=\alpha+\beta-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta=\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta$.选(B).

4. 由 $180°<\alpha+\beta<360°$,可知 $30°<\frac{1}{6}(\alpha+\beta)<60°$.选(A).

5. 因 $AD=AB-DB=\frac{3}{4}AB, CD=AB-AC-DB=\frac{5}{12}AB$,故 $CE=AE+CD-AD=\frac{1}{12}AB$.选(C).

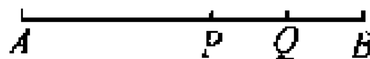
6. 因$\angle DOE=\frac{1}{2}(\angle AOC+\angle COB)=90°, \angle BOD=\angle DOC$,故选(C)

7. **解** 如图,分四种情形,可分别求得$\angle COD$等于$40°, 160°, 180°, 300°$.



(第7题)

8. **解** 如图,$2PQ=2(PB-BQ)=AB-2BQ=AQ-BQ$.故存在.



(第8题)

9. **解** 当8点整时,分针指在“12”,时针指在“8”,它们之间角度差是240°.分针每分针旋转过的角度是6°,时针每分钟旋转过的角度是$(\frac{1}{2})°$,故

$$\frac{240°}{(6-\frac{1}{2})°}=\frac{480}{11}(分)=43\frac{7}{11}(分).$$

时针与分针重合的时刻是 8 时 $43\frac{7}{11}$分.

10. **解** 如图,有



(第 10 题)

$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AB\cdot CD+(AC+CD)\cdot BC$

$=AB\cdot CD+CD\cdot BC+AC\cdot BC$

$=AC\cdot CD+AC\cdot BC$

$=AC\cdot(BC+CD)=AC\cdot BD.$

故题设等式成立.

E P A B C D F

(第 11 题)

11. **解** 设 S_1、S_2、S_3、S_4、S_5 依次为点 P 位于射线 AE,线段 AB、BC、CD,射线 DF 上时 $PA+PB+PC+PD$ 的值.

如图,有

$S_1=PA+(PA+AB)+(PA+AC)+(PA+AD)$

$\quad=AD+BC+2AB+4PA.$

同理 $S_2=AD+BC+2PB,$

$S_3=AD+BC,$

$S_4=AD+BC+2PC,$

$S_5=AD+BC+2CD-4PD.$

可见,P 为线段 BC 上任一点时 $PA+PB+PC+PD$ 最小.

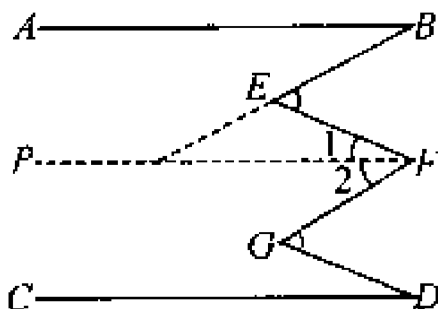
12. **解** 不妨设射线 $OP_1,OP_2,\cdots,OP_{12}$ 绕圆心 O 逆时针排列,假若 $\angle P_1OP_2>30^\circ$,$\angle P_2OP_3>30^\circ,\cdots,\angle P_{11}OP_{12}>30^\circ$,$\angle P_{12}OP_1>30^\circ$,将上述各式相加,即得

$\angle P_1OP_2+\angle P_2OP_3+\angle P_{11}OP_{12}+\angle P_{12}OP_1>12\times30^\circ=360^\circ$,这与周角为 360° 不符.从而表明 $\angle P_1OP_2$,$\angle P_2OP_3,\cdots,\angle P_{12}OP_1$ 中一定存在不超过 30° 的角.

练习十五

1. 两角平分线平行或重合,不能垂直.选(D).

2. 过 F 作 $FP\parallel AB$,则 $FP\parallel CD$(如图),有 $\angle E=\angle B+\angle 1$,$\angle G=\angle 2+\angle D$.选(A).



(第 2 题)

3. 因 $\angle CBF=\angle DFE$,故 $BC\parallel DF$,$\angle BCG=\angle D$.又 $AB\parallel CD$,所以 $\angle ABC=\angle BCG$,$\angle ABE=\angle CGB$.因 AB 平分 $\angle CBE$,有 $\angle ABC=\angle ABE$.于是 $\angle ABC=\angle BCG=\angle ABE=\angle CGB=\angle DGF$.选(D).

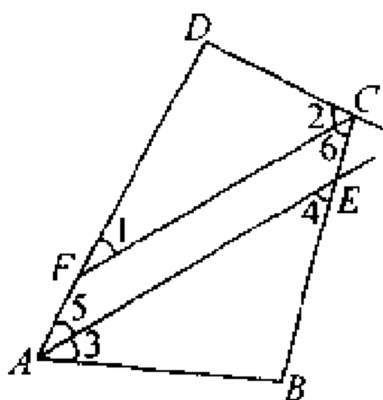
4. 如图,因 $AE\parallel CF$,AE,CF 分别平分 $\angle DAB$,$\angle DCB$,故 $\angle 1=\angle 5=\angle 3$,

$\angle 2=\angle 6=\angle 4$. 又

$\angle 1+\angle 2+\angle D=180°$,

$\angle 3+\angle 4+\angle B=180°$,

所以$\angle B=\angle D$.选(A).可举反例否定(B)、(D).



(第4题)

5. 依题设知$\angle ABO=\angle OBC=\frac{1}{2}\angle ABC=25°$, $\angle ACO=\angle OCB=\frac{1}{2}\angle ACB=30°$. 又 $EF\parallel BC$, 有 $\angle EOB=\angle OBC$, $\angle FOC=\angle OCB$.所以

$$\begin{aligned}\angle BOC&=180°-(\angle EOB+\angle FOC)\\&=180°-(\angle OBC+\angle OCB)\\&=180°-(25°+30°)\\&=125°.\end{aligned}$$

6. 连结 AC.因 $AB\parallel CD$,故$\angle BAC+\angle ACD=180°$.又四边形 $AEFC$ 内角和为 $360°$,故$\angle A+\angle E+\angle F+\angle C=540°$.

7. 因$\angle 1$与$\angle 3$互余,$\angle 2$与$\angle 3$的余角互补,所以$\angle 1$与$\angle 2$互补,$AB\parallel CD$. 于是$\angle ACM=\angle CGD=\angle 4=115°$,又 CP 平分$\angle ACM$,故$\angle MCP=\frac{1}{2}\angle ACM=57.5°$.

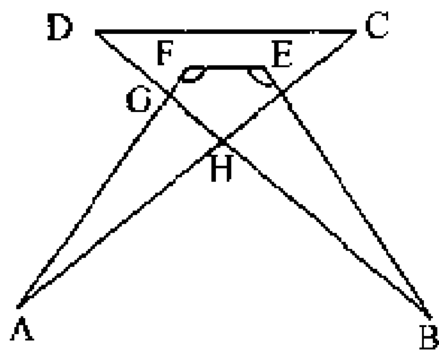
8. 设 AD、BE、CF 两两相交于 P、Q、M.则

$$\begin{aligned}&\angle MPQ+\angle PQM+\angle QMP\\&=(180°-\angle A-\angle B)+(180°-\angle C-\angle D)+(180°-\angle E-\angle F)\\&=180°.\end{aligned}$$

于是,得

$$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F=360°.$$

9. 如图,$\angle C+\angle D=\angle DHA$, $\angle DHA+\angle A=\angle FGH$,而四边形 $EFGB$ 的内角和为 $360°$,故$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F=360°$.



(第9题)

10. **证明** 延长 AB 交 l 于 H.因$\angle 2=\angle 1$,且$\angle 1=40°$,$\angle ABC=130°$,所以

$$\angle BHC=\angle ABC-\angle 2=130°-40°=90°.$$

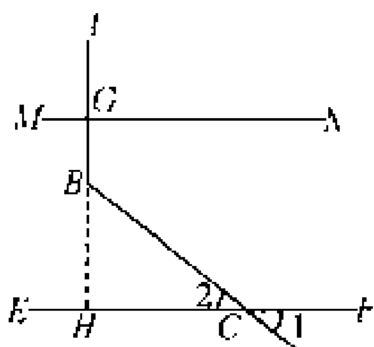
又 $MN\parallel l$,所以$\angle BGN=90°$,$AB\perp MN$.

11. **解** $\angle ADB=180°-(\angle DAB+\angle DBA)$

$$= 180° - \frac{1}{2}(\angle CAB + \angle CBA)$$

$$= 180° - \frac{1}{2}(180° - \angle C)$$

$$= 90° + \frac{1}{2}\angle C.$$



(第 10 题)

同理　$\angle BFE = 90° + \frac{1}{2}\angle EDB$

于是，有

$$\angle BFE = 90° + \frac{1}{4}\angle ADB$$

$$= 90° + \frac{1}{4}(90° + \frac{1}{2}\angle C)$$

$$= 112.5° + \frac{1}{8}\angle C.$$

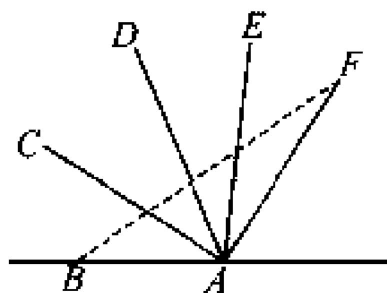
因$\angle BFE$ 的度数为整数，$0° < \angle C < \angle 180°$，故当$\angle C = 4°$时，$\angle BFE$ 的度数最小，即$\angle BFE$ 至少是 $113°$.

12. **证明**　设平面上给定的 6 点为 A、B、C、D、E、F. 显然，存在其中两点使得其余各点都在过这两点的直线 l 的同侧. 不妨设这两点为 A、B. 其余各点 C、D、E、F 沿顺时针方向依次排列(如图). 分两种情形：

(ⅰ) $\angle BAF \leqslant 120°$. 此时 $\angle BAC$，$\angle CAD$，$\angle DAE$，$\angle EAF$ 中必有一个不超过 $30°$. 否则，

$\angle BAF = \angle BAC + \angle CAD + \angle DAE + \angle EAF > 30° \times 4 = 120°$，

矛盾. 不妨设$\angle DAE \leqslant 30°$，则$\triangle ADE$ 满足要求.



(第 12 题)

(ⅱ) $\angle BAF > 120°$. 连结 BF，则$\angle AEF$ 与$\angle AFB$ 的和小于 $60°$，其中必有一角小于 $30°$，故$\triangle AFB$ 满足要求.

练习十六

1. 分别由二个不同方向上的 4 条直线(每个方向上二条)组成一个平行四边形. 故有不同平行四边形

$$\frac{4\times 3}{2}\cdot\frac{6\times 5}{2} = 90(\text{个}).$$

2. 直线 EF 截直线 AB、CD,可得 2 对同旁内角.同样,MN 截直线 AB、CD 也得 2 对同旁内角.

直线 AB 截平行直线 EF、MN 得 2 对同旁内角,截 CD、EF 得 2 对同旁内角、截 CD、MN 得 2 对同旁内角,共得 6 对同旁内角.

同理直线 CD 也可截得 6 对同旁内角.

共有同旁内角

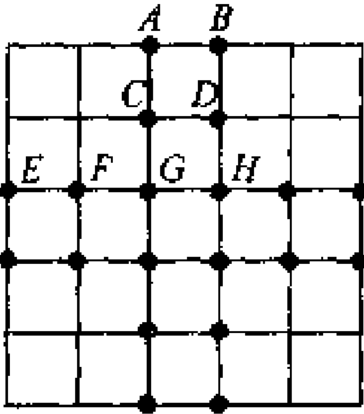
$$2\times 2+6\times 2=16(\text{对}).$$

3. 经观察可知,序号为 $2n$ 的线段长为 n,㉔号线段的长度是 12.

4. 分五步依次给 A、B、C、D、E 染色.

首先,考虑给 A 染色,有 5 种染色方法;其次给 B 染色,因为能与 A 同色,故有 4 种染色方法;因 C 不能与 A、B 同色,故有 3 种染色方法;同样,D 也有 3 种染色方法,由于 E 与 A、C、D 均相邻,仅有两种染色方法,故共有不同染色方法

$$5\times 4\times 3\times 3\times 2=360(\text{种}).$$

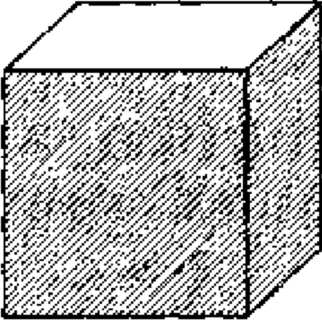


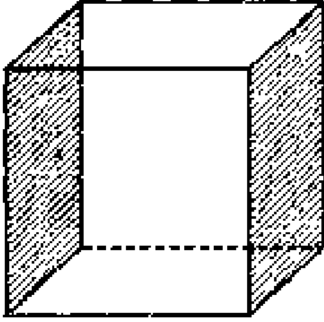
5. 边长为 1 的小正方形有 9 个;边长等于 CF 长的小正方形有 4 个;边长等于 AE 长的小正方形有 4 个;边长等于 DF 长的小正方形有 2 个;边长等于 BE 长的小正方形有 2 个.

共有小正方形

$$9+4+4+2+2=21(\text{个}).$$

6. **解** 将每个“尖朝上”的小三角形与它的“尖”(即上面的顶点)对应起来.这时只有最下面的 11 个面点没有对应的三角形.但还有很多“尖朝下”的小三角形.最后一排尖朝下的就有 9 个,可以将它们分别与各自的朝下的“尖”对应起来.这样,圆点只剩下两个没有对应的三角形,而“尖朝下”的三角形在倒数第二排就有 8 个,所以三角形比圆点多.





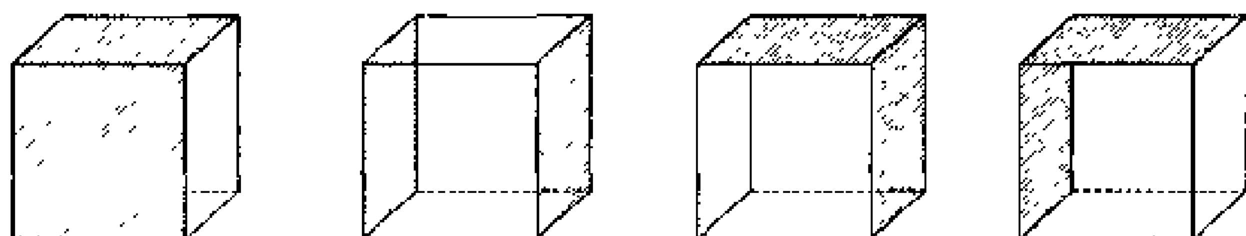
7. **解** 经过翻动,总可以积木涂红的一面成为下底面.这时有两种情况:

(ⅰ)另一个涂红的面是上底面.

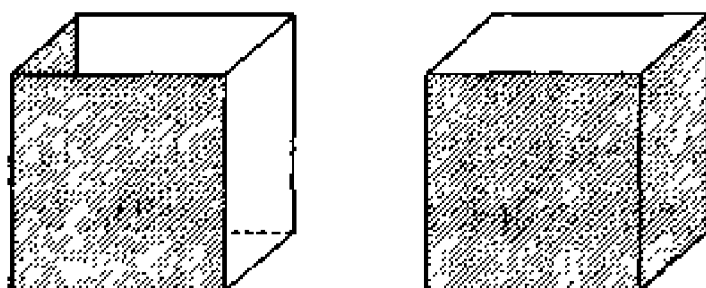
四个侧面中,两个涂黄,

两个涂蓝.有两种不同的积木块,一种是黄色的两个面相邻,另一种是黄色的两个面不相邻,如图(1),其中涂黑的面表示黄色的面.

(ⅱ)另一个涂红的面是侧面.



总可假定这个涂红的面是后面的面.有4种不同的积木块,第一种与两个涂红的面相对的是两个涂黄的面,第二种与两个涂红的面相对的是两个涂蓝的面,第三个上底面与右侧面涂黄,第四种上底面与左侧面涂黄.如图(2),其中涂黑的面表示黄色的面.这后两种积木是不同的.你无法通过翻转,使它们涂相同颜色的面位置都相同.而下面的两种,一种是上底面与右侧面涂蓝,另一种是上底面与左侧面涂蓝.如图(3),不难看出它们分别与图(2)的后两种相同.



因此,最多能涂成6种不同的积木块.

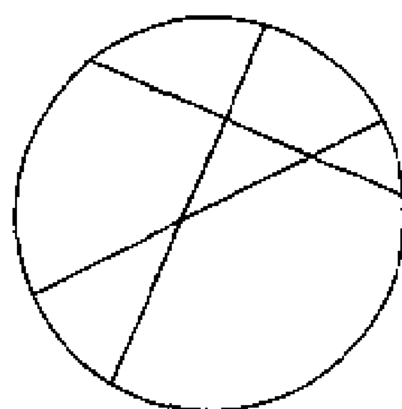
8. **解** 设 n 条直线最多将圆面分成 a_n 块.显然 $a_1=2$,$n-1$ 条直线将圆面分成 a_{n-1}块的基础上,添加第 n 条直线,该直线被前面 $n-1$ 条直线至多分为 n 部分(线段成射线),每一部分都将所在的圆面块一分为二,从面增加了 n 块.所以,有

$$a_n=a_{n-1}+n.$$

因此,可算得

$$a_9=a_1+(1+2+\cdots+9)=46.$$

$$a_{10}=a_9+10=56.$$



(第8题)

所以,至少要画10条直线才可将圆纸片分成不少于50个小纸片.

9. **解** 平面上的10条直线,如果两两相交且无三线交于一点,则可出现

$$\frac{10\times9}{2}=45$$

个交点.若其中两直线平行,则可减少一个交点,现取三组不同方向的平行线

(如图),第一组5条平行线,第二组3条平行线,第三组2条平行线,共减少交点

$$\frac{5\times4}{2}+\frac{3\times2}{2}+1=14(\text{个}).$$

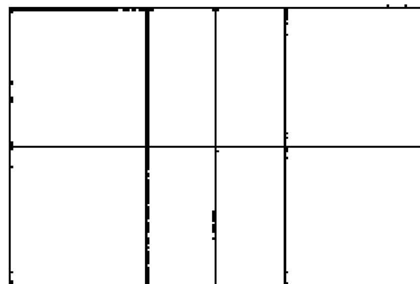
因此,图中恰有交点31个.满足要求的情形存在.

(第9题)

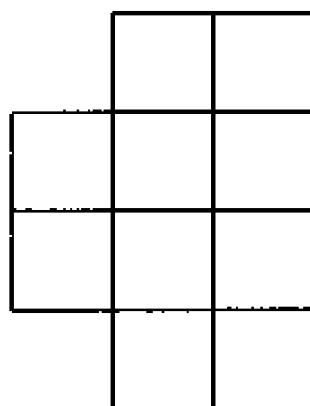
10. **解** 先看图(1),从5条竖线中取出2条,从3条横线中再取出2条围成长方形,有长方形

$$\frac{5\times4}{2}\times\frac{3\times2}{2}=30(\text{个}).$$

再看图(2),4条竖线、中间3条横线可组成长方形



(第10题)(1)



(第10题)(2)

$$\frac{4\times3}{2}\times\frac{3\times2}{2}=18(\text{个}).$$

由图(2)中最上面的一条横线与第二、三、四条横线以及三条竖线中的二条围成长方形有

$$3\times\frac{3\times2}{2}=6(\text{个}).$$

同样由最下面一条横线和其他直线(不包括最上面横线)也可组成6个长方形.

在原图中由第二、三条横线与第6条直线再加上第二、三、四、五条竖线之一可组成长方形.这样的长方形有4个.

综上所述,共有长方形

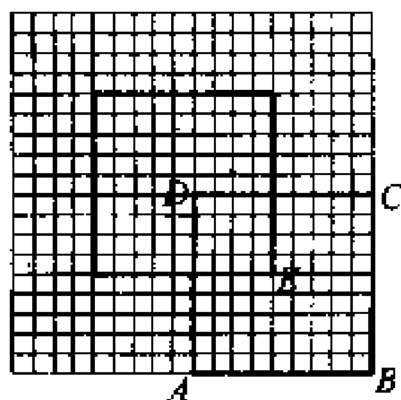
$$30+18+6+6+4=64(\text{个}).$$

11. **解** 如图,9×9的小正方形用右下角的点E代表.点E只能在棋盘右下角的正方形$ABCD$(包括边界)的格点上,且正方形$ABCD$中的每一个格点都可作为9×9小正方形的点E,且只能作为一个9×9小正方形的点E.因此,正

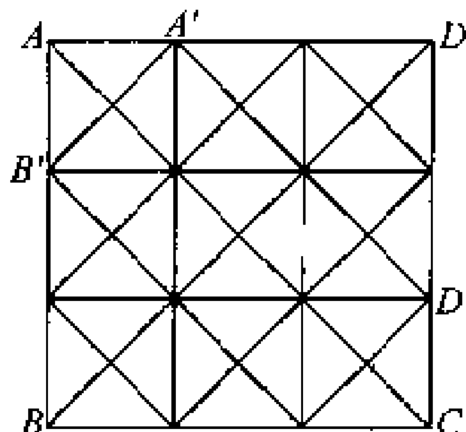
方形 $ABCD$ 上格点有

$$10\times10=100(\text{个}).$$

即为 9×9 小正方形的个数.



（第 11 题）



（第 12 题）

12. **解** 如图,两边分别与 AB、BC 平行的长方形有 9 个 1×1,12 个 12×1,4 个 2×2,6 个 3×1,4 个 3×2,1 个 3×3($a\times b$ 表示长为 a,宽为 b),两边分别与 $A'B'$、$B'C'$ 平行的长方形有 12 个 1×1(注意这里长度单位与前面的不同),16 个 2×1,5 个 2×2,8 个 3×1,4 个 3×2,4 个 4×1,2 个 4×2,共有

$(9+12+4+6+4+1)+(12+16+5+8+4+4+2)=87$(个).

练习十七

1. 沿对角线对折,即知选(D).

2. 设长方形的长、宽分别为 a,b,则

$$S_{\text{阴影}}=ab-\frac{1}{2}ab-\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{2a}{3}=\frac{1}{3}ab.$$

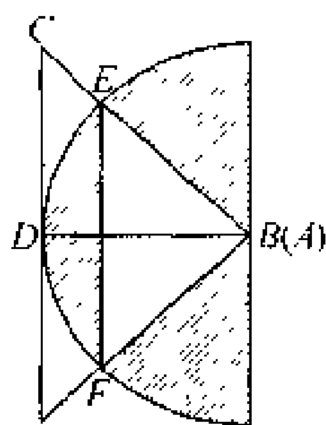
选(B).

3. $ab-ac-bc+c^2=(a-c)(b-c)$.选(C).

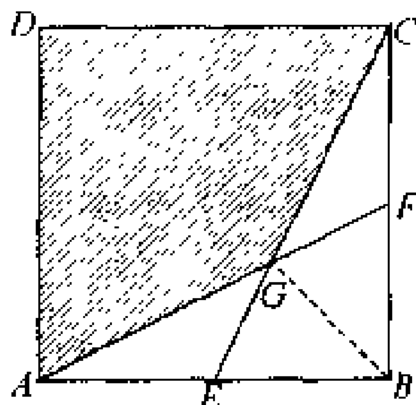
4. 连 BD、AD、AE,依题设知 $S_{\triangle BCN}=S_{\triangle BDN}$,$S_{\triangle BDM}=S_{\triangle ADM}$,$S_{\triangle ADP}=S_{\triangle AEP}$,$S_{\triangle AEQ}=S_{\triangle FEQ}$.故阴影部分面积为六边形 $ABCDEF$ 面积的一半,即为 4.

5. 沿 CD 对折,A 可与 B 重合,于是 $\angle ADC=\angle BDC=90°$.因此,可将原图形沿 CD 剪开,重新拼成右图.其中 $\angle FBE=90°$,阴影部分面积为

$$S_{\text{半圆}}-S_{\triangle BEF}=\frac{1}{2}\cdot\pi\times10^2-\frac{1}{2}\times10^2=107(\text{cm}^2).$$



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，设 AF、CE 交于 G，连 BG. 依题设，$S_{\triangle ABF}=S_{\triangle BCE}$，进而有 $S_{\triangle AEG}=S_{\triangle CFG}$. 又 $S_{\triangle AGE}=S_{\triangle BGE}$，$S_{\triangle CFG}=S_{\triangle BFG}$，故 $S_{\triangle AGE}=S_{\triangle BGE}=S_{\triangle BGF}=S_{\triangle CGF}$. 注意到 $S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}\times20\times10=100(\text{cm})^2$，故

$$S_{阴影}=20^2-4S_{\triangle AGE}=400-4\times\frac{100}{3}=266\frac{2}{3}(\text{cm})^2$$

7. 连 AP，依题设，有

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot d_1+\frac{1}{2}AC\cdot d_2=\frac{1}{2}AB(d_1+d_2).$$

又 $S_{\triangle ABC}=42\text{cm}^2$，$AB=12\text{cm}$，故

$$d_1+d_2=7(\text{cm}).$$

8. **证明** 连 BP. 因 $BR\perp AC$，$PQ\perp AC$，故 $BR/\!/PQ$. 于是 $S_{\triangle BPR}=S_{\triangle BQR}$. 进而有 $\frac{1}{2}S_{\triangle ARQ}=S_{\triangle ARP}=S_{\triangle ABC}$.

9. **证明** 连 BM、DM，有

$$S_{\triangle PMB}=\frac{1}{2}(S_{\triangle PAC}+S_{\triangle ABC})=\frac{1}{2}(S_{四边形ABCD}+S_{\triangle PCD}),$$

$$S_{\triangle PNB}=\frac{1}{2}S_{\triangle PDB}=\frac{1}{2}(S_{\triangle PCD}+S_{\triangle BCD}),$$

$$S_{\triangle PNB}=\frac{1}{2}S_{\triangle PDB}=\frac{1}{2}(S_{\triangle PCD}+S_{\triangle BCD}),$$

$$S_{\triangle MNB}=\frac{1}{2}(S_{四边形BCDM}-S_{\triangle BCD})$$

$$=\frac{1}{4}S_{四边形ABCD}-\frac{1}{2}S_{\triangle BCD},$$

所以 $S_{\triangle PMN}=S_{\triangle PMB}-S_{\triangle PNB}-S_{\triangle MNB}$

$$=\frac{1}{4}S_{四边形ABCD}.$$

10. **证明** 连接 BD、AC，有 $S_{\triangle ADK}=\frac{1}{2}S_{\triangle ADB}$，$S_{\triangle BMC}=\frac{1}{2}S_{\triangle BCD}$，因此，有

$$S_{\triangle ADK}+S_{\triangle BMC}=\frac{1}{2}S_{\text{四边形}ABCD}. \quad ①$$

同理，
$$S_{\triangle BKC}+S_{\triangle AMD}=\frac{1}{2}S_{\text{四边形}ABCD}. \quad ②$$

由①，②得

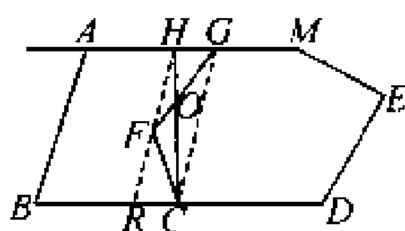
$$S_{\text{四边形}ABCD}=S_{\triangle ADK}+S_{\triangle BMC}+S_{\triangle BKC}+S_{\triangle AMD}$$
$$=S_{\text{四边形}ABCD}-S_{\text{四边形}MPKQ}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle AQD}.$$

所以
$$S_{\text{四边形}MQKP}=S_{\triangle BPC}+S_{\triangle AQD}.$$

11. **解** 连结 CG，过点 F 作 $HR /\!/ CG$，分别交 AM 于 H，交 BC 于 R. 连结 CH，则 CH 为所求过 C 点的直路. 事实上，$S_{\triangle FCG}=S_{\triangle HCG}$，有

$$S_{FCDEMG}=S_{\triangle FCG}+S_{CDEMG}$$
$$=S_{\triangle HCG}+S_{CDEMG}=S_{CDEMH}.$$

故 CH 满足题设要求.



(第 11 题)

12. **证明** (1) $\frac{AF}{FB}=\frac{S_{\triangle APC}}{S_{\triangle BPC}}$，$\frac{BD}{DC}=\frac{S_{\triangle APB}}{S_{\triangle APC}}$，$\frac{CE}{EA}=\frac{S_{\triangle BPC}}{S_{\triangle APB}}$. 三式相乘得 $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$.

(2) $\frac{PD}{AD}=\frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}}$，$\frac{PE}{BE}=\frac{S_{\triangle APC}}{S_{\triangle ABC}}$，$\frac{PF}{CF}=\frac{S_{\triangle APB}}{S_{\triangle ABC}}$，三式相加即得

$$\frac{PD}{AD}+\frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}=\frac{S_{\triangle BPC}+S_{\triangle APC}+S_{\triangle APB}}{S_{\triangle ABC}}=1.$$

(3) 由(2)知 $\frac{PD}{AD}$，$\frac{PE}{EB}$，$\frac{PF}{FC}$ 中至少有一个不大于 $\frac{1}{3}$. 不妨设 $\frac{PD}{AD}\leqslant\frac{1}{3}$，即 $\frac{PD}{AP+PD}\leqslant\frac{1}{3}$，所以 $\frac{AP}{PD}\geqslant 2$. 同样可得 $\frac{BE}{EP}$，$\frac{CF}{FP}$ 中一数不大于 2.

练习十八

1. 应将 a 乘以 100000 才能保证 a 恰在 b 的左边组成一个六位数，这六位数是 $100000+b$. 故应选(B).

2. 以 25 为末两位数的自然数，其幂的末两位仍是 25，故应选(B).

3. 当 $n=1,2,3,4,5,6,7,8\cdots$ 时 1993^n 的末位数字依次为

$$3,9,7,1,3,9,7,1,\cdots$$

每隔4个数出现重复,又

$$1993 \div 4 = 498 \cdots\cdots 1,$$

故 1993^{1993}的个位数字为3.

4. 设所求之数为 x 和 y,则全体三位数之和即为

$$\begin{aligned}&(1+2+3+\cdots+999)-(1+2+3+\cdots+99)\\&=494550 = 600x + x + y.\end{aligned}$$

而 $494550 = 601 \times 822 + 528$,如果 $x > 822$,则 y 为负数,如果 $x < 822$,则 y 不是三位数.所以知 $x = 822, y = 528$.它们的和为1350.

5. 依题设,有

$$1000a + 100(a+b) + 10(a+b+c) + (a+b+c+d) = 1989.$$

显然有 $a=1$.注意到有进位,故 $a+b=8, b=7$,进而可求得 $c=9, d=2$,这个四位数为1792.

6. 设这个三位数的三个数字为 a,b,c.若$\overline{abc}$最大,则$\overline{cba}$最小,从而有

$$\begin{aligned}&\overline{abc}-\overline{cba}\\&=(100a+10b+c)-(100c+10b+c)\\&=99(a-c).\end{aligned}$$

由此可得所求的三位数是99的倍数,而在这样的三位数198,297,396,495,693,792,891中仅有495符合题意.故所求的三位数为495.

7. 依照题述规则数字串为

$$1,9,8,9,2,8,6,8,8,4,2,8,6,8,8,4,\cdots$$

可见1989后面的数总是不断循环重复出现286884,每6个一组,即循环周期为6.因为 $(1989-4) \div 6 = 330 \cdots\cdots 5$,所以所求数字是8.

8. **解** 设甲的年龄为$\overline{ab}$,则乙的年龄为$\overline{ba}$,丙的年龄为$\frac{1}{3}(\overline{ab}-\overline{ba})$,有

$$\overline{ba} = 15 \times \frac{1}{3}(\overline{ab}-\overline{ba}),$$

即 $$5\,\overline{ab} = 6\,\overline{ba}.$$

于是 $$5(10a+b) = 6(10b+a),$$

可得 $$4a = 5b.$$

故 a 是5的倍数,b 是4的倍数.注意到 $1 \leqslant b \leqslant a \leqslant 9$,唯有 $a=5, b=4$.

甲、乙、丙三人的年龄分别为54、45、3.

9. **解** 设三位数为$\overline{abc}$,依题设有

$$\overline{abc} = \overline{ab} + \overline{ba} + \overline{bc} + \overline{cb} + \overline{ac} + \overline{ca}.$$

即 $100a + 10b + c = 10a + b + 10b + a + 10b + c + 10c + b + 10a + c + 10c + a$

化简得 $$26a = 4a + 7c.$$

由于 b, c 是 0~9 中的数字，所以

$$4b + 7c \leqslant 4 \times 9 + 7 \times 9 = 99,$$

因而 $a < 4$，即 a 的可能取值为 1,2,3.

当 $a = 1$ 时，$4b + 7c = 52$，相应地有 $b = 3, c = 4$；

当 $a = 3$ 时，$4b + 7c = 78$，相应地有 $b = 9, c = 6$.

所以符合题设的三位数有 132,264,396.

10. **解** 显然 a_2 可取 0 到 8 中任何一数.

当 $a_2 = 0$ 时，a_1 和 a_3 可取 1~9 中的任何数. 根据乘法原理有 $9 \times 9 = 81$ 种取法，相应的凹数有 9^2 个；当 $a_2 = 1$ 时，a_1 和 a_3 可取 2~9 中任何数，有 8×8 种取法，相应的凹数有 8^2 种；依此类推，当 $a_2 = 2, 3, \cdots, 8$ 时. 相应的凹数有 $7^2, 6^2, \cdots, 2^2, 1^2$ 个. 故所有三位凹数有

$$9^2 + 8^2 + \cdots + 1^2 = 285(\text{个})$$

11. **解** 原数的首位数必为 1. 否则，它的 5 倍或 6 倍是七位数. 这不可能. 又将首位数 1 的六位数乘以 2,3,4,5,6 所得的五个乘积的首位数字必会逐步增大，且首位数字不能为 0. 故原数的六个数字必互不相同，而首位是 1，且没有一个为 0. 为此，可设这个六位数为 $\overline{1abcde}$.

首先 e 不可能为偶数. 否则它的 5 倍会有 0 出现. 同样，$e \neq 5$. 所以 e 可能为 3,7,9. 当 $e = 3, 9$ 时，它的 1,2,3,4,5,6 倍是 6 个不同的数字，再加上首位 1，共出现 7 个不同数字，这不可能. 故 $e = 7$. 由 7 乘以 1,2,3,4,5,6 可知原六位数的数字为 1,2,4,5,7,8. 因此 d 可能为 2,4,5,8. 可以验证 $d = 5$. 同样 c 可能为 2,4,8. 经验证 $c = 8$. b 可能为 2,4，再经验证 $b = 2$.

所以原数为 142857.

12. **解** 设最后留下的人是 N 号. 显然 N 是奇数. 从而，在 N 号学生第一次报 1 之前，已经有 $\frac{N-1}{2}$ 名学生退出了游戏. 也就是说，当 N 号学生开始报 1 时，游戏中有 $2000 - \frac{N-1}{2}$ 名学生. 而最终留下的人正好是开始报数的人（N 号）. 易知

$$2000 - \frac{N-1}{2} = 2^k \qquad (k \text{ 为正整数}).$$

因 $N\leqslant 2000$，故 $2000-\frac{N-1}{2}\geqslant 1000$，所以

$$2000-\frac{N-1}{2}=1024=2^{10},$$

从而，有

$$N=2\times(2000-1024)+1=1953.$$

所以，最后留下的人是 1953 号学生.

13. **解** 只须证明存在正整数 x,y，使得 $1<x\leqslant y$ 且 $xy>m>x(y-1)$. 因为此时，以 x,y 为边长的矩形满足题设要求.

设 $k^2\leqslant m<(k+1)^2$，则 $k\geqslant 4$ 分以下几种情形：

(ⅰ) $m=k^2$. 令 $x=k-1,y=k+2$，则

$$xy=k^2+k-2>m>k^2-1=x(y-1).$$

(ⅱ) $k^2<m<k(k+1)$. 令 $x=k,y=k+1$，则

$$xy=k(k+1)>m>k^2=x(y-1).$$

(ⅲ) $m=k(k+1)$. 令 $x=k-1,y=k+3$，则

$$xy=k^2+2k-3>m>k^2+k-2=x(y-1).$$

(ⅳ) $k(k+1)<m<(k+1)^2$. 令 $x=y=k+1$，则

$$xy=(k+1)^2>m>k(k+1)=x(y-1).$$

综上所述，命题获证.

练习十九

一、填空题

1. 因为 $n^3+3=(n^3+3^3)-24=(n+3)(n^2-3n+9)-24$. 所以 $n+3\mid 24$，因此，n 可为 1,3,5,9 或 21，它们之和为 39.

2. 因 $n^2+9n-2=(n+11)(n-2)+20$ 应被数 $n+11$ 整除，所以 20 被 $n+11$ 整除. 故 $n=9$.

3. 由题意可设 $\overline{aob}=n\,\overline{ab}$，即

$$100a+b=10na+nb,$$

即 $$10(10-n)a=(n-1)b. \qquad ①$$

由 $a<b$ 知 $1\leqslant a\leqslant 8, 2\leqslant b\leqslant 9$，进而 $2\leqslant n\leqslant 9$.

当 $n=9$ 时，$5a=4b$，得 $a=4,b=5$；

当 $n=8$ 时，$20a=7b$，无解；

当 $n=7$ 时，$5a=b$，得 $a=1,b=5$；

当 $n=6$ 时，$8a=b$，得 $a=1,b=8$；

当 $2\leqslant n\leqslant 5$ 时，①式不可能成立.

综上所述，符合条件的 $\overline{ab}$ 为 15，18，45 等三个数.

4. 设有任意自然数 p，魔术数 N 为 m 位数，则

$$\overline{pN}=p\times 10^m+N.$$

由 $N\mid\overline{pN}$，可得 $N\mid p\times 10^m$，又由于 p 为任意数，所以必有 $N\mid 10^m$，即 N 为魔术数，只需满足 $N\mid 10^m$.

当 $m=1$ 时，有 $N=1,2,5$；

当 $m=2$ 时，有 $N=10,20,25,50$；

当 $m=3$ 时，如果 $N<130$，则有 $N=100,125$.

所以小于 130 的魔术数计有 9 个.

5. 设满足题设要求的六位数为 $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$，则

$$a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6=11n\quad(n\text{ 为整数}).$$

由 $\quad a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=0+1+2+3+4+5=15,$

及 $\quad a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=11n+2(a_2+a_4+a_6),$

可得
$$11n+2(a_2+a_4+a_6)=15.$$

可以证明这个等式不可能成立，即这样的 n 不存在.

(ⅰ) 当 $n\geqslant 2$ 时，$11n+2(a_2+a_4+a_6)\geqslant 22$；

(ⅱ) 当 $n=1$ 时，$11+2(a_2+a_4+a_6)=15$，$a_2+a_4+a_6=2$，这不可能.

(ⅲ) 当 $n=0$ 时，$2(a_2+a_4+a_6)=15$，这也不可能；

(ⅳ) 当 $n\leqslant -1$ 时，显然也不可能.

综上所述，满足题设要求的六位数个数为 0.

6. **证明** 依题意，有

$$\begin{aligned}\overline{xyz}&=100x+10y+z\\&=100(7-y-z)+10y+z\\&=700-90y-99z,\end{aligned}$$

当 $y=z$ 时，

$$\overline{xyz}=700-189z=7(100-27z),$$

所以 $7\mid\overline{xyz}$.

反之

$$xyz=700-91y-98z+(y-z)$$

$$= 7(100 - 13y - 14z) + (y - z).$$

所以当 $7|\overline{xyz}$时，有 $7|y-z$. 由于 $x+y+z=7, 0\leqslant y<7, 0\leqslant x<7$，故 $y=z$.

7. **解** 因

$$\begin{aligned}\overline{abcd} &= 1000a + 100b + 10c + d \\ &= 1000a + 96b + 8c + (4b + 2c + d) \\ &= 1000a + 96b + 8c + 32 \\ &= 8(125a - 12b + c + 4).\end{aligned}$$

所以，$8|\overline{abcd}$.

8. **证明** 因

$$\begin{aligned} n(n+1)(2n+1) &= n(n+1)[(n+2)+(n-1)] \\ &= n(n+1)(n+2) + (n-1)n(n+1),\end{aligned}$$

又因 $n, n+1, n+2$ 为三个连续整数，故 $n(n+1)(n+2)$ 为 $1\times2\times3$ 的倍数，即 $6|n(n+1)(n+2)$.

同理 $6|(n-1)n(n+1)$.

所以 $6|n(n+1)(n+2)+(n-1)n(n+1)$.

9. **证明** $2222 = 7\times318-4$,

$5555 = 7\times793+4$,

所以 $2222^{5555}+5555^{2222}$

$$\begin{aligned}&= (2222^{5555}+4^{5555}) + (5555^{2222}-4^{2222}) - (4^{5555}-4^{2222}) \\ &= (2222+4)(2222^{5555}-2222^{5555}\cdot4+\cdots) + (5555-4)(5555^{2221}+5555^{2220}\cdot4 \\ &\quad +\cdots) - 4^{2222}(64-1)(64^{1110}+64^{1109}+\cdots).\end{aligned}$$

因为 $7|2226, 7|5551, 7|63$，所以 $7|2222^{5555}+5555^{2222}$.

10. **解** 如果大力士砍去一个蛇头，则增加 $10-1=9$ 个蛇头；如果大力士砍去 17，则减少 $17-4=3$ 个蛇头；如果砍去 21 个，则减少 21 个，如果砍去 33 个，则增加 $48-33=15$ 个. 可以看出，在任一情况下蛇头数改变量是 3 的倍数 (9,3,21,15 都能被 3 整除). 因此，在任何时候大蛇的头数与原始数 1000 相差一个 3 的倍数的量. 由此可知，任何时候都砍不光大蛇所有的头. 这是因为 1000 不能被 3 整除，而 0 能被 3 整除. 所以大力士不可能战胜大蛇.

11. **证明** 设 3×3 大小的魔方上的自然数为 $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$，它的魔方和为 k，于是根据魔方的性质得

$$a_{11}+a_{22}+a_{33}=k,$$

$$a_{21}+a_{22}+a_{23}=k,$$

$$a_{31}+a_{22}+a_{13}=k.$$

所以$(a_{11}+a_{21}+a_{31})+3a_{22}+(a_{33}+a_{23}+a_{13})=3k$.利用$a_{11}+a_{21}+a_{31}=k$和$a_{33}+a_{23}+a_{13}=k$代入得$3a_{22}=k$,故$3|k$.

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

(第11题)

12. **证明**　设第一列中有男孩m人,则女孩也有m人,即每一列中共$2m$人.又设第一列男孩中有k名与第二列的女孩组成对,$(m-k)$名与第二列的男孩组成对.则第二列有k名男孩与第一列的女孩组成对.因而共有$2k$个男孩与女孩组成对,它是总对数$2m$的一半,所以$m=2k$.总人数$4m=8k$是8的倍数.

13. **解**　不存在.设

$$A=a_0\cdot 10^r+a_1\cdot 10^{r-1}+\cdots+a_r$$

是被$M=\underbrace{11\cdots1}_{m个}$整除的最小的正整数,那么$A\geqslant M$,$r\geqslant m-1$.如果$r\geqslant m$,那么

$$A_1=A-(10^r-10^{r-m})=A-10^{m-1}(10^m-1)<A,$$

仍被M整除,与A的最小性矛盾.

如果$r=m-1$,那么必有$a_0=a_1=\cdots=a_r$,这时A的数字和

$$a_0+a_1+\cdots+a_r=ma_0\geqslant m.$$

由上述知不存在被$\underbrace{11\cdots1}_{m个}$整除且数字和小于$m$的正整数.

练习二十

1. 运用筛法.先划去比2大的所有偶数,再划去比3大的所有3的倍数,再划去比5大的所有5的倍数,…,可求出100以内的所有素数:2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97.共25个.除1外,还有74个合数.

2. 依题意容易检验两位"无暇素数"分别是11,13,17,31,37,71,73,79,97,共计9个,它们的和是429.

3. 设满足要求的素数为p.因p是两个素数的和,所以$p>2$.从而p是奇数,这就是说,p表示成两个素数之和的形式中必定有一个加数为偶数,即等于2.同理可知,p表示成两个素数之差的形式中减数必定是2.于是有$p=q+2$,$p=r-2$,其中q,r都是素数.由于三个连续奇数中至少有一个被3整除,因此,p

$-2, p, p+2$ 中有一个等于 3. 易知 $p-2=3$,所以 $p=5$. 满足要求的素数只有 1 个.

4. 所求三个数的乘积能被 5 整除,因此其中有一个数是 5. 设 p, q 为另外两个数,且不妨设 $p>q$,则

$$5pq=5(p+q+5),$$

即

$$(p-1)(q-1)=6.$$

但是只有两种方式把 6 分解成两个数之积:$6=2\times3=1\times6$,故 $p=4, q=3$ 或 $p=7, q=2$. 这三个素数之和为 12 或 14.

5. 由 $n=a+b+ab$ 得

$$n+1=(1+a)(1+b).$$

当 $n=1$ 时,上式无解,1 不是"好数".

当 $n=2$ 时,上式无解,1 也不是"好数".

一般地,若 $n+1$ 为素数,则 $n+1=(a+1)(b+1)$ 无解,所以使 $n+1$ 为素数的 n 都不是"好数".

这样在 n 的前 100 个自然数中有 26 个,它们是 1,2,4,6,…,96,100. 其余的 n 都使 $n+1$ 为合数.

设 $n+1=pq(p\geqslant2, q<n+1)$,由 $pq=(a+1)(b+1)$ 可相应求出 a, b,所以 $n+1$ 为合数的 n 均为"好数".

故在 1~100 这 100 个自然数中,"好数"共有 $100-26=74$ 个.

6. **证明** 因为 a, b, c, d 是自然数,所以 $a^2-a, b^2-b, c^2-c, d^2-d$ 都是偶数,于是

$$M=(a^2+b^2+c^2+d^2)-(a+b+c+d)$$

是偶数. 又 $a^2+b^2=c^2+d^2$,所以

$$a^2+b^2+c^2+d^2=2(a^2+b^2)$$

是偶数. 所以

$$a+b+c+d=(a^2+b^2+c^2+d^2)-M$$

是偶数. 但 $a+b+c+d>2$,所以 $a+b+c+d$ 是个合数.

7. **解** 设 p 是素数,且 $p=a^2-b^2$,其中 a, b 为自然数,且 $a>b$,则

$$p=a^2-b^2=(a-b)(a+b).$$

有 $a-b=1$,a, b 一奇一偶,故 p 是奇素数. 反之,设 $p=2n+1$,则 $a=n+1, b=n$.

故若素数 p 能表示成两个平方数之差,则表示法惟一. 且 p 是奇素数.

8. **证明** 对每个自然数 n，令 $m=n+2$，则

$$nm+1=n(n+2)+1=n^2+2n+1=(n+1)^2.$$

显然 $n+1>1$，$n+1<nm+1$，且 $n+1|nm+1$，所以 $nm+1$ 是个合数.

9. **证明** $6=2\times3$. 全部因数之和为

$$1+2+3+6=12=2\times6;$$

$$28=2^2\times7,$$

全部因数之和为

$$(1+2+2^2)(1+7)=56=2\times28;$$

$$496=2^4\times31$$

全部因数之和为

$$(1+2+2^2+2^2+2^4)(1+31)$$
$$=496\times2.$$

10. **解** 如果 $m>1$，则 m 与 $m+2n^2+3$ 的奇偶性不同，故它们的乘积中除含有质因数 2 之外，还至少含有一个奇数质因数，故不少于两个质因数. 如果 $m=1$，则 $m+2n^2+3=2(n^2+2)$. 若 n 为奇数，则 $2(n^2+2)$ 除含有质因数 2 外，还含有奇数质因数. 若 $n=2$ 为偶数，则 $2(n^2+2)=4(k^2+1)$，仍然至少含有两个不同的质数.

综上所述，$m(n+9)(m+2n^2+3)$ 中至少含有两个不同的质因数.

11. **解** 因 $14=1\times14=2\times7$，所以恰有 14 个约数的自然数有两种类型，即 P_1^{13} 或 $p_1p_2^6$.

（ⅰ）当所求四位数属于 P_1^{13} 型，由 $P_1^{13}\geqslant2^{13}>2000$，知不可能.

（ⅱ）当所求四位数属于 $p_1p_2^6$ 型，由于 $5^5>1200$，所以 $p_2=2$ 或 3.

当 $p_2=3$ 时，则 $p_1=11,31,41,\cdots$，由 $p_1p_2^6=11\times64=704$ 非四位数. $p_1p_2^6=31\times64=1984$. 否则 $p_1p_2^6\geqslant41\times64>2000$，不可能.

12. **解** 因为 $a+b$ 为质数，所以 a 与 b 的奇偶性不同，必为一奇一偶，这个偶数只能为 2.

若设 $a=2$，则 b，$b+2$，$b+10$ 仍为质数.

（ⅰ）当 b 除以 3 余 1 时，显然 $b+2$ 为 3 倍数，即 $b+2$ 不为质数，此时不合题意；

（ⅱ）当 b 除以 3 余 2 时，则显然 $b+10$ 为 3 的倍数，即 $b+10$ 不为质数，此时不合题意；

（ⅲ）当 b 被 3 整除时，由于 b 为质数，故只有 $b=3$，此时 $b+2=5$，$b+10=$

13 均为质数,符合条件;

若设 $b=2$,则 $a,a+2,5a+2$ 也为质数,同样根据 a 的不同情况讨论:

当 a 除以 3 余 1 时,$a+2$ 为合数,不合条件;

当 a 除以 3 余 2 时,$5a+2$ 为合数,不合条件;

当 a 被 3 整除时,只有 $a=3$. 此时 $a+2=5,5a+2=17$,符合条件.

故符合条件的数有两组:2,3,5,13;3,2,5,17.

13. **解** 由于最初所有电灯是关着的,所以只有那些拉了奇数次开关的电灯才是亮的.而每一盏电灯的拉线开关被拉了多少次取决于这盏灯的编号的数字有多少个不同的正约数,最后亮着的灯的编号只有为完全平方数.所以,只有编号为 1,4,9,16,36,49,64,81,100 的电灯最后是亮着的.

练习二十一

1. 由 $x=6q+3$ 得 $3x=18q+9=6(3q+1)+3$,所以 $3x$ 被 6 除余 3. 选(D).

2. 由 $1993^3=(284\times7+5)^3$

$$=(284\times7)^3+3\times(284\times7)^2\times5+3\times(287\times7)\times5^2+125$$

知 1993^3 被 7 除的余数与 125 被 7 除的余数相同. $125=17\times7+6$. 所以 1993^3 被 7 除余数为 6. 从 4 月 18 日星期日数起,每过七天就是星期六,4 月 24 日是星期六,则 1993^3-6 恰是星期六. 再往后数 6 天,1993^3 天是星期五. 1993^3 天之后的那一天是星期六. 故选(B).

3. 这个数是

$$123456789101112\cdots99100101102.$$

因为 $1+2+\cdots+9$ 能被 9 整除,$1+0+1+1+\ \ +1+2+\cdots+9$(即 10 到 99 之间的所有整数的数字和)也能被 9 整除,所以这个数被 9 除的余数是

$$1+0+0+1+0+1+1+0+2=6.$$

选(B).

4. 因 d 可整除 $2312-1417=5\times179$,又可整除 $1417-1059=2\times179$,而 179 是素数,即知 $d=179,r=164$. 所以 $d-r=179-164=15$. 选(A).

5. 依题设,$P=QD+R,Q=Q'D'+R'$. 将第二式代入第一式,得

$$\begin{aligned}P&=(Q'D'+R')D+R\\&=Q'(DD')+(R+R'D).\end{aligned}$$

因 $R<D,R'<D'$,故 $R\leqslant D-1,R'\leqslant D'-1$. 所以 $R+R'D\leqslant D-1+(D'-$

$1)D = DD' - 1 \leqslant DD'$. 选(A).

6. **证明** 将大于 11 的自然数按除以 3 的余数分成三类.

当 $N = 3m(m \geqslant 4)$时,有 $N = 6 + 3(m-2)$;

当 $N = 3m + 1(m \geqslant 4)$,有 $N = 4 + 3(m-1)$;

当 $N = 3m + 2(m \geqslant 4)$,有 $N = 8 + 3(m-2)$.

故命题获证.

7. **解** 依题意可设 $a = 7m + 2, b = 7n + 5$,其中 $m、n$ 是整数,则

$$\begin{aligned} a^2 - 3b &= (7m+2)^2 - 3(7n+5) \\ &= 49m^2 + 28m + 4 - 21n - 15 \\ &= 7(7m^2 + 4m - 3n - 2) + 3. \end{aligned}$$

故 $a^2 - 3b$ 除以 7 余 3.

8. **解** 依题设有 $N = 4a + 3$,又可设 $a = 3b + c(0 \leqslant c < 3)$,则

$$N = 4(3b + c) + 3 = 12b + 4c + 3.$$

当 $c = 0$ 时,$N = 12b + 3$;

当 $c = 1$ 时,$N = 12b + 7$;

当 $c = 2$ 时,$N = 12b + 8 + 3 = 12b + 11$.

故 N 除以 12 的余数可以是 3,7,11.

9. **证明** 因 p 为素数,且 $p \geqslant 5$,所以 p 不能被 3 整除.因而 3 除 p 必余 1 或 2.于是

$$p^2 - 1 = (p+1)(p-1).$$

必有因数 3.又 p 为奇数,故 $p+1$ 和 $p-1$ 是连续偶数.所以其中必有一个又是 4 的倍数.故 $24 \mid p^2 - 1$.

10. **解** 设这个两位数为 $a = 10x + y$,则其反序数为 $10y + x$,于是

$$10x + y = (10y + x)q + q \quad (q \text{ 为正整数}).$$

即

$$(10 - q)x - (10q - 1)y = q.$$

当 $q = 1$ 时,$9(x - y) = 1$,这不可能成立.

当 $q = 2$ 时,$8x - 19y = 2$,知 y 是偶数.当 $y = 2$ 时,$x = 5$;当 $y = 4,6,8$ 时,算式右边不能被 4 整除,不可能有解.从而,当 $q = 2$ 时,只有解 $a = 52$.

当 $q = 3$ 时,$7x - 29y = 3$.当 $y \leqslant 2$ 时,得出 x 为分数,而当 $y \geqslant 3$ 时,$x > 10$,也就是在这种情况下无解.

当 $q = 4$ 时,$6x - 39y = 4$.因右端 4 不能被 3 整除,所以无解.

当 $q \geqslant 5$ 时,有

$$5x \geqslant (10-q)x=(10q-1)y+q \geqslant 49y+q \geqslant 54,$$

由此知 $x \geqslant 11$，无解.

综上所述，所求数为 52.

11. **证明** 若 a,b 中有一个能被 3 整除，则结论成立. 否则可分以下情况：

(ⅰ) $a=3k+1, b=3k_2+1$ 或 $a=3k_1+2, b=3k_2+2$（k_1, k_2 为整数），则 $a-b=3(k_1+k_2)$. 结论成立.

(ⅱ) $a=3k_1+1, b=3k_2+2$ 或 $a=3k_1+2, b=3k_1+1$，（k_1, k_2 为整数），则 $a+b=3(k_1+k_2+1)$. 结论成立.

综上所述，结论成立.

12. **解** 由 $pq+11$ 为素数，则 $pq+11$ 必为奇数，pq 为偶数. 又 p,q 为素数，所以 $p=2$ 或 $q=2$.

设 $p=2$，则 $14+q$ 与 $2q+11$ 均为素数. 若 $q=3k+1$，则 $14+q$ 被 3 整除；如果 $q=3k+2$，则 $2q+11$ 被 3 整除. 因此 $q=3$.

类似的，若 $q=2$，$7p+2$ 与 $2p+11$ 均为素数. 若 $p=3k+1$，则 $7p+2$ 被 3 整除；若 $p=3k+2$，则 $2p+11$ 被 3 整除. 因此 $p=3$.

因此 p 与 q 一个为 2，另一个为 3. 所以

$$(p^q+q^p)\div(2^p+2^q)=(2^3+3^2)\div(2^3+2^2)=(8+9)\div(8+4)=\frac{17}{12}.$$

13. **证明** 显然，2^n 与 p 被 3 除余数为 1 或 2.

当 $2^n=3m+1$（m 为整数）时，由于 2^n+p 为素数，所以 p 只能为 $3m'+1$（m' 为整数），此时

$$2^{n-1}+p=2\cdot 2^n+p=2(3m+1)+3m'+1=3m+3$$

（m 为正整数）为合数.

当 $2^n=3m+2$ 时，同样，p 只能为 $3m'+2$（m' 为整数），这时

$$2^{n+1}+p=2\cdot 2^n+p=2(3m+2)+3m'+2$$
$$6m+3m'+6=3(m+m'+2)$$

为合数.

故无论 p,n 取什么值，$2^{n+1}+p$ 均为合数.

练习二十二

1. 两个正整数的最小公倍数可与较大数相等，它们的最大公约数可与较

小数相等，故 $p \leqslant b < a \leqslant q$.

2. 由 $60|x$，$x|360$，可知 x 只可能为 60，120，180，360. 又由 $90|z$，$z|360$，知 z 只可能为 90，180，360. 因 $60|y$，$90|y$，故 $180|y$. 因 $(x,y)=60$，故 $x \neq 180, 360$. 又 $[z,x]=360$，且 $(y,z)=90$，故 $x=120^{\circ}$，$z=90$. 于是 $x+z=210$.

3. $d=(19n+14,10n+3)=(9n+11,10n+3)=(9n+11,n-8)=(83,n-8)\neq 1$. 因 83 是素数，故 $n-8=83$，$n=91$.

4. 易知 1，2，4，8，16 两两不同组，故所分组数不小于 5. 又分为五组 1；2，3；4，5，6，7；8，9，10，11，12，13，14，15；16，17，18，19，满足题设要求. 故 m 的最小值为 5.

5. $(357,105,84)=21$. 正方体木块的边长为 21cm.

6. 变换中两数逐渐变小但最大公约数不变，又 $(1024,\underbrace{11\cdots1}_{20个1})=1$，故最后两个相同数均为 1.

7. 这些四位数是 $[9,8,7,6]=504$ 的倍数，最小为 $504\times 2=1008$，最大为 $504\times 19=9594$，共 18 个.

8. $24n=(n,24)[n,24]=4\times 168$，解得 $n=28$.

9. **证明** 设 $d=(a+b,a^2+b^2)$，则 d 可被

$$(a+b)^2-(a^2+b^2)=2ab$$

整除. 因 $(a,b)=1$，故 $(a,a+b)=1$. 同理 $(b,a+b)=1$. 所以 $(a,d)=(b,d)=1$. 于是 d 为 1 或 2.

10. **证明** 因
$$\begin{aligned}&4(3x-7y+12z)+3(7x+2y-5z)\\&=11(3x-2y+3z),\end{aligned}$$
且 $11|(7x+2y-5z)$，故 $11|4(3x-7y+12z)$. 又 $(4,11)=1$，所以 $11|(3x-7y+3z)$.

11. **解** 因 $99=9\times 11$，$(9,11)=1$，故 $\overline{81ab93}$ 既可被 9 整除，又可被 11 整除，于是

$$9|(8+1+a+b+9+3),$$
$$11\mid[(8+a+9)-(1-b+3)],$$

即 $9|(21+a+b)$，$11|(13+a-b)$. 注意到 a,b 为数码，故 $a+b$ 为 6 或 15，$a-b$ 为 -2 或 9. 经验证 $a=2$，$b=4$.

12. **解** 因 $(7n+6,4n+5)=(3n+1,4n+5)=(3n+1,n+4)=(n-7,n+4)=(n-7,11)\neq 1$，故 $11|n-7$. 设 $n-7=11k$（k 为整数），则 $n=11k+7$. 又 0

$<n<50$,故 $k=0,1,2,3$.满足题设要求的 n 为 7,18,29,40.

13 **解** 若 $n=p^k$(p 为素数,k 为正整数,则 $M_n=pM_{n-1}$.

若 n 不是某个素数的幂,可设 $n=ab$,$(a,b)=1$,$a>1$,$b>1$,则 $a\leqslant n-1$,$b\leqslant n-1$.于是 $a\mid M_{n-1}$,$b\mid M_{n-1}$,从而有 $ab\mid M_{n-1}$,即 $n\mid M_{n-1}$.所以 $M_{n-1}=M_n$.

综上所述,当且仅当 n 不是某个素数的幂时,$M_{n-1}=M_n$.

[General Information]
□□=□□□□□□□□□□
□□=
□□=219
SS□=0
□□□□=
Vss□=98586488